مقرر مادة

مبادئ الإحصاء

لطلبة الجامعة المفتوحة

الطرق الإحصائية

1 ـ 1 مقدمة

لكل علم من العلوم الطبيعية والإنسانية في حياتنا المعاصرة مجال يختص به وهدف يخدمه، فمثلاً نجد أن علم الكيمياء يبحث ويختص بدراسة خواص المواد والعناصر والمركبات من جميع النواحي، وعلم الفيزياء يختص بدراسة الظواهر الطبيعية من صوت وضوء وكهربائية ومغناطيسية وذرّة وغيرها، وعلم التاريخ ما هو إلا سجل لحركة البشرية عبر العصور وهكذا. ولكن فيما يخص علم الإحصاء؟ لقد وجد علم الإحصاء لخدمة العلوم التطبيقية والإنسانية فهو يقدم الحلول لطرق جمع ووصف وتلخيص وتحليل البيانات عن الظواهر المختلفة لغرض استنتاج ما تدل عليه من معلومات لاتخاذ القرارات المناسبة حولها عندما يكون القرار غير واضح والاستنتاج غير صريح، مع معرفة وحساب وتقدير الخطأ الناتج من هذه القرارات.

وفي الواقع نجد أننا نستخدم هذا المنطق في حياتنا اليومية في عدة مجالات فنقوم بتلخيص مقالة أو موضوع أو بحث ما لمن يهمه الاطلاع على ذلك عن طريق التركيز على النقاط الأساسية الهامة. ولكن السؤال الذي يطرح نفسه هنا كيف يمكننا تلخيص البيانات بأنواعها من الظواهر المختلفة الإجابة على هذا السؤال يقدمها علم الإحصاء بفروعه المتعددة.

وفي الحقيقة منذ خلق الإنسان وهو يعمل جاداً على معرفة حقائق الكون الذي يعيش فيه والتعرف على أسراره، وقد بدأ بالتأمل في الظواهر المحيطة به واتبع لذلك فلسفات عديدة فسر بها ما استطاع من ظواهر طبيعية وإنسانية،

ولكن بتقدم العصر وكثرة الأنشطة البشرية وتفرع العلوم في حياتنا المعاصرة اتجه إلى فهم وتفسير الظواهر المحيطة عن طريق التجربة التي بها وضع كثيراً من القوانين والنظريات في العلوم الطبيعية، ولكن واجهته مشاكل من نوع آخر في هذه العلوم حيث لم يتمكن من الحصول على كل البيانات والمعلومات عن الظواهر المختلفة بالإضافة إلى أن العلوم الإنسانية قد يتعذر القيام بتجارب في ميادينها مما أدى إلى التفكير في طريقة أخرى أو منهج آخر لاستخدامه في مثل هذه المجالات؛ هذا المنهج هو المنهج الإحصائي وقد أطلق عليه إسم الطرق الاحصائية أو علم الاحصاء. ففي الواقع دعت الحاجة إلى هذا العلم لكثرة البيانات عن الظواهر في العلوم المختلفة مما يصعب بل يستحيل فهم أي معلومات عن هذه البيانات دون استخدام الطرق الإحصائية.

وقد بدأ استخدامها منذ القدم بالقيام بتعدادات عامة لحصر الإمكانيات البشرية والاقتصادية وغيرها للدول، ثم تشعب المفهوم والاستخدام بعد ذلك ووضعت له قوانين ونظريات أثبتت التجارب صحة تطبيقاتها في جميع مجالات العلوم المختلفة.

وقد أمكن تقسيم علم الإحصاء إلى فرعين أساسيين هما الاحصاء الوصفي والإحصاء الاستنتاجي؛ حيث يختص الفرع الأول بطرق وصف وتلخيص وعرض البيانات فيما يبحث الفرع الثاني في طرق استنتاج وتعميم النتائج واتخاذ القرارات المناسبة باحتمال محسوب لخطأ هذه القرارات.

1 ـ 2 مجالات استخدام علم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى

على الرغم من أن علم الإحصاء علم قائم بذاته إلا أنه يعتبر علماً مساعداً ومنهجاً مستخدماً لحل مشاكل العلوم الأخرى خاصة في مجالات البحث والتطوير. وفي الحقيقة فإن العلاقة بين علم الإحصاء والعلوم الأخرى علاقة حتمية حيوية ولا يمكن الاستغناء عنها، فأينما وجدت البيانات وجدت الطرق الإحصائية. ومما لا شك فيه أنه لا يخلو علم من العلوم في الوقت

الحاضر من بيانات عديدة ووجود حاجة ماسة إلى فهم الخصائص والمعلومات التي تدل عليها هذه البيانات، وعليه يلعب علم الإحصاء دورين هامين: الأول توفير الطرق التي يمكن بها جمع ووصف وعرض البيانات وذلك باستخدام منهج علمي سليم، ومن الواضح أن هذا الدور مهم جداً عند القيام بالتعدادات العامة مثل تعداد السكان والتعدادات الزراعية والاقتصادية وحصر القوى العاملة وغيرها حيث يتم إعداد الطريقة التي تجمع بها البيانات وكيفية وضعها في جداول تخدم أغراض المؤسسات والأمانات العامة مثل توزيع السكان حسب البلديات أو الأعمار أو المؤهلات العلمية وغيرها. أما الدور الثاني فقد دعت الحاجة إليه عند القيام بالتجارب البحثية وتطويرها في مجالات العلوم المختلفة حيث غالباً ما نحصل على بيانات مختلفة لنفس الظاهرة تحت نفس الظروف، عليه يقدم علم الإحصاء الطرق المناسبة لتنظيم وتصميم التجارب وتدعيم النتائج التي تم الحصول عليها من هذه الأبحاث عن طريق قوانين رياضية أثبتت صحة ومنطقية استخدامها.

وفي الواقع أننا لا نستطيع حصر مجالات استخدام الطرق الإحصائية ولكن نورد هنا بعض الأمثلة التي منها:

1 ـ العلوم الاقتصادية والمالية

مما لا شك فيه أن العلوم الاقتصادية والمالية غنية بالبيانات عن الظواهر المختلفة مثل الأسعار، كميات الإنتاج، الإستهلاك، التصدير والاستيراد من السلع المختلفة، الميزانيات العامة كل هذه البيانات تتغير بالزيادة أو النقصان على المدى الطويل وهنا نود معرفة النمط العام لهذه التغيرات حسب الزمان والمكان ومحاولة التنبوء بقيم هذه الظواهر مستقبلاً؛ فباستخدام الطرق الإحصائية يمكننا القيام باتخاذ القرارات المناسبة عن الجدوى الاقتصادية من المشاريع المختلفة ومراقبة جودة الإنتاج طبقاً لمواصفات عامة والقيام بالدراسات الاستطلاعية عن ظواهر اقتصادية ومالية عامة أو دراسة علاقة السعر

بالجودة أو العرض والطلب أو التكاليف. كما أن علم الإحصاء يوفر لنا الطرق التي يمكن استخدامها لتسهيل أعمال المراجعة الدورية للحسابات والحصول على تقدير لتكاليف وحدة الإنتاج وتقدير زمن تسديد الديون وإعداد الميزانيات العامة وغيرها.

2 ـ العلوم الطبية

عند تجربة دواء جديد أو طريقة إجراء عملية جراحية أو غيرها غالباً ما نود اتخاذ القرار المناسب عن النتائج التي تم الحصول عليها من العينة التي أجريت عليها التجربة وتعميم النتائج على المجتمع كله. كما أن البيانات عن عدد المرضى والوفيات والمواليد والامكانيات العامة للمستشفيات توضح لنا تغيرات هذه الأعداد التي منها نحصل على مؤشرات إحصائية تستخدم في تقييم البرامج الصحية المستخدمة ومدى ملاءمتها للتطور الحاصل بالمجتمع.

3 ـ العلوم الزراعية

الطرق الإحصائية توفر لنا الأسلوب العلمي الصحيح في الحكم على مدى الفائدة من استعمال نوع جديد من السماد أو العلف أو طريقة جديدة لتحسين التربة أو تحسين جودة إنتاج ما أو مبيد لآفات زراعية.

4 ـ علوم الحياة

من الأمور المهمة في علوم الحياة الحصول على علاقات رياضية بين الظواهر المختلفة، كعلاقة الصفات المورثة بالصفات الموروثة وعلاقة الظواهر الطبيعية وغيرها بالظواهر البيولوجية.

1 ـ 3 خطوات الطرق الإحصائية

مما تقدّم يتضح لنا أن الطرق الإحصائية تلعب دوراً هاماً في فهم وتفسير

البيانات المتحصّل عليها عن الظواهر المختلفة في مجالات العلوم المتعددة. ويمكن تقسيم الطرق الإحصائية في جميع الدراسات إلى الخطوات التالية:

1 ـ تحديد الهدف ووضع الفروض

من الأمور المهمة في جميع الدراسات وخاصة الإحصائية منها تحديد هدف الدراسة تحديداً تاماً وصياغة الفروض التي تؤدي إلى الوصول إلى هذا الهدف مع تحديد المتغيرات التي لها علاقة بالدراسة وكيفية قياسها. وعلى الرغم من أن هذه الخطوات هي منطقية وبديهية إلا أنه يلاحظ أن غالبية الدراسات تهمل الاهتمام بها اعتماداً على وضوحها مما قد يؤدي إلى الحصول على أخطاء يصعب معالجتها.

2 ـ جمع البيانات

بعد تحديد الهدف والبيانات المراد جمعها تبدأ مرحلة جمع البيانات إما من مصادر سابقة كنشرات ودوريات وسجلات وإما الحصول على البيانات من مصادرها الأساسية، ويمكن أن يتم ذلك عن طريق الحصر الشامل لجميع وحدات الدراسة أو عن طريق اختيار عينة عشوائية من مجتمع الدراسة ويتوقف ذلك على الوقت والجهد والمال المتوفر مع تحديد إمكانية استخدام الحاسب الآلي في هذه المرحلة أو الطرق اليدوية.

3 ـ تلخيص وعرض البيانات

عند الانتهاء من مرحلة جمع البيانات التي غالباً ما تكون كثيرة حيث يصعب فهم وتوضيح اي معلومات وهي على هذه الصورة، عليه يلجأ الباحث إلى تصنيفها ووضعها في جداول تكرارية ورسومات بيانية وحساب مقاييس إحصائية أخرى تبعاً للأهداف المرسومة حتى يتحقق الغرض المطلوب من الدراسة.

4 ـ تحليل البيانات وإعداد التقرير النهائي

الخطوات الأخيرة في الدراسة هي تحليل النتائج التي تم الحصول عليها

وذلك باستخدام طرق إحصائية مناسبة آخذين في الاعتبار أن جميع الخطوات السابقة يتم تصميمها لخدمة الطرق المستخدمة في التحليل وإعداد التقرير النهائي لهذه النتائج.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن علم الإحصاء يهتم ويبحث في الطابع العام للبيانات ولا تهمه قيمة مفردة لوحدها؛ فلا يهتم مثلاً بدرجة طالب ما بقدر ما يهمه درجات مجموعة من الطلبة، ولا يهتم بإنتاج مصنع في يوم ما بقدر ما يبحث في إنتاج هذا المصنع لفترة زمنية، كذلك فإن الطرق الإحصائية بصورة عامة ما هي إلا أساليب توضح مؤشرات عامة عن الظواهر المختلفة لتوجيه وتنبيه أهل الاختصاص لدراسة المسببات وإيجاد الطرق المناسبة لعلاجها والاستفادة منها، فمثلاً توضح الطرق الإحصائية بأن نسبة الإصابة بمرض ما قد زادت (أو نقصت) خلال فترة زمنية محددة أو بأن مستوى المعيشة قد تغير وعلى الاختصاصيين دراسة الموضوع لتحديد المسببات وطرق علاجها.

وعلى العموم فإن رسم سياسات الدولة في جميع المجالات والتخطيط لها التخطيط السليم في الوقت الحاضر لا يتم إلاّ باستخدام الطرق الإحصائية المختلفة للوصول إلى القرار الصحيح المناسب.

وكما ذكرنا سابقاً بأن علم الإحصاء ينقسم إلى فرعين الإحصاء الوصفي والإحصاء الإستنتاجي، فسوف نبدأ في هذا المقرر بدراسة الفرع الأول. وقبل أن نتعرض إلى الطرق المستخدمة لذلك نذكر هنا بعض المصطلحات المستخدمة ونترك الباقي في مقرر آخر.

1 ـ المجتمع الإحصائي

المجتمع في علم الإحصاء هو مجموعة من العناصر تحمل نفس الصفة التي تهم الباحث مثل: طلبة المعهد، حسابات جميع زبائن مصرف ما، إنتاج مصنع ما خلال فترة معينة، درجات طلبة في إمتحان قبول لإحدى الكليات، المساحات الزراعية ببلدية غريان.... وهكذا.

2 ـ العينة

العينة هي جزء من المجتمع المراد دراسته مثل: مجموعة من طلبة المعهد، مجموعة من حسابات الزبائن لمصرف ما، عدد من المساحات الزراعية ببلدية غريان، عدد من قطع إنتاج أحد المصانع.

3 ـ الظاهرة

الظاهرة الإحصائية هي صفة لعناصر تختلف من عنصر لآخر في الشكل أو النوع أو الكمية، وتسمى قيم الصفة بالمتغير، مثل رصيد مجموعة من الزبائن، أطوال عدد من الطلبة، جنسيات مجموعة من الأفراد، الميزانية السنوية لمؤسسة لعدد من السنوات، الميزانية السنوية لعدد من المؤسسات.

4 ـ المعلمة

الصفات العامة للمجتمع تسمى معالم مثل المتوسطات.

5 ـ الإحصاءة

الصفات الخاصة بالعينة تسمى إحصاءات مثل متوسط العينة، ونلاحظ أن المعالم لا تتغير للمجتمع الواحد ولكن الإحصاءة تتغير من عينة إلى أخرى لنفس المجتمع.

تمارين

1 ـ إشرح فائدة الطرق الإحصائية موضحاً إجابتك بأمثلة كلما أمكن ذلك.

2 ـ أذكر مع الشرح خطوات الدراسات الإحصائية.

3 ـ أذكر أي الحالات التالية تدل على مجتمع وأيها تدل على عينة.

أ ـ 100 طالب من كلية المحاسبة.

ب ـ جميع طلبة الجامعة.

جـ ـ 25 ورقة إجابة من امتحان ما.

د ـ 20 حساب توفير بأحد المصارف.

هـ ـ جميع العاملين بمصرف الجماهيرية.

و ـ رأس مال جميع المنشآت بالجماهيرية.

ز ـ جميع العاملية بالجامعة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة.

ى ـ 10 أعضاء من هيئة التدريس في كلية المحاسبة.

4 ـ أذكر معلمة لمجتمع طلبة الكلية وإحصاءة لمجموعة من أعضاء هيئة التدريس بها.

طرق تبويب وعرض البيانات

2 ـ 1 مقدمة

لقد ذكرنا أن الإحصاء الوصفي يبحث ويختص في وصف وتلخيص وعرض البيانات لتوضيح معالمها الأساسية، وعليه فإن البيانات تعتبر العنصر الأساسي في هذا المجال فعليها تتوقف دقة الوصف؛ فإذا كانت البيانات التي تم الحصول عليها دقيقة وواقعية وشاملة كان الوصف تبعاً لذلك صحيحاً وقريباً من الواقع، وبذلك فإن الاهتمام التام والحرص الشديد عند الحصول على البيانات باختلاف الطرق يعتبر الحجر الأساسي والعمود الفقري في علم الإحصاء. وقبل أن نبدأ في شرح طرق الوصف نتعرض إلى مصادر وأنواع البيانات.

2 ـ 2 مصادر البيانات

مما لا شك فيه أن للبيانات مصادر عديدة تختلف باختلاف طبيعتها ويمكن أن تقسم على النحو التالي:

أ ـ النشرات والسجلات والدوريات

نجد في وقتنا المعاصر أن كثيراً من المؤسسات العامة والجهات الرسمية في الدولة تهتم بإصدار نشرات تتضمن بيانات حول أنشطتها المختلفة اعتماداً على أن كثيراً من المهتمين بهذه الأنشطة يهمهم الإطلاع على هذه البيانات مثل المصرف المركزي، أمانة الاقتصاد والتخطيط وإدارات المشاريع المختلفة والمؤسسات البحثية، كما أن هناك جهات رسمية أخرى تقوم بحكم القانون

بتسجيل بياناتها في سجلات رسمية مثل: سجلات المواليد والوفيات والزواج والطلاق بالبلدية وسجلات الخريجين حسب التخصصات المختلفة ونتائج الامتحانات لجميع المراحل بأمانة التعليم وغيرها، وعليه فعند القيام بدراسات لها علاقة بهذه الأنشطة يمكن الحصول على البيانات المطلوبة من هذه المصادر.

ب ـ التجارب

التجارب بمختلف طرقها وأنواعها تعتبر أحد المصادر الرئيسية المهمة في الحصول على بيانات في جميع مجالات العلوم الطبيعية منها والإنسانية. وقد تكون هذه التجارب داخل المعامل أو خارجها.

جـ ـ الاستبيانات

في كثير من الدراسات الاقتصادية والإنسانية لا يمكن الحصول على بيانات من المصادر السابقة، فعليه يتم الحصول عليها في صورة استبيان وذلك بالإجابة على أسئلة معينة تتعلق بموضوع الدراسة حيث تكون الأسئلة سهلة وواضحة وشاملة ولا تحتمل التأويل، هذه الإجابات تكوّن البيانات المطلوبة.

د ـ التعدادات العامة

تعتبر التعدادات العامة من أغنى وأهم المصادر للبيانات مثل التعداد العام للسكان، التعدادات الزراعية والصناعية، تعداد حصر القوى العاملة حيث تقوم الأجهزة المسؤولة في الدولة بهذه التعدادات على فترات دورية متتابعة، وقد يلجأ الباحث لإجراء تعدادات جزئية للحصول على ما يحتاجه من بيانات غير متوفرة لديه من مصادر أخرى.

2 ـ 3 أنواع البيانات

يمكن تصنيف البيانات باختلاف مصادرها على النحو التالي:

1 ـ بيانات كمية (عددية)

من الملاحظ أنه عند التعبير عن بيانات بعض الظواهر فإن ذلك يتم في صورة عددية وهي تنقسم إلى قسمين: بيانات منفصلة وأخرى متصلة.

أ ـ البيانات المنفصلة

هي تلك البيانات المعبرة عن الظواهر في صورة أعداد صحيحة فقط مثل: عدد الحسابات الجارية حسب المصرف، عدد المصارف بكل بلدية، عدد المحاسبين بكل مؤسسة، عدد المدرسين بكل قسم بالكلية... الخ، وتسمى بالبيانات المنفصلة أو الظواهر المنفصلة.

ب ـ البيانات المتصلة

بعض الظواهر الكمية الأخرى يتم التعبير عن قيم بياناتها بأعداد قياسية (أي قد تكون عدداً صحيحاً أو كسراً من وحدة القياس) مثل درجات مجموعة من الطلبة، دخل المنتج بأحد الأمانات، كمية الإنتاج اليومي لأحد المصانع، الزمن، المساحة، الطول... الخ، وتسمى هذه الظواهر ظواهر متصلة.

2 ـ بيانات نوعية (وصفية)

البيانات التي لا يمكن التعبير عن قيمها في صورة عددية يتم التعبير عنها بصفات وأنواع مختلفة وتسمى ظواهر نوعية، وهي كذلك يمكن تقسيمها إلى قسمين: ظواهر نوعية خاضعة للترتيب وأخرى غير خاضعة للترتيب.

أ ـ ظواهر نوعية خاضعة للترتيب

البيانات المعبرة عن بعض الظواهر النوعية تكون خاضعة للترتيب حيث يمكننا ترتيب صفاتها وأنواعها ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً) مثل: تقديرات النجاح، المستوى التعليمي، الحالة الصحية أو النفسية لمريض وهكذا.

ب ـ ظواهر نوعية غير خاضعة للترتيب

الظواهر النوعية الأخرى يتم التعبير عن عناصرها بصفات وأنواع لا تخضع لأي معيار من معايير الترتيب مثل: الجنس، الجنسيات، الحالة

الاجتماعية، أنواع الإنتاج لأحد المشاريع أو المصانع، الديانة. . . الخ. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الظواهر النوعية بصورة عامة يبحث ويهتم بها علم الإحصاء ليس كأنواع وإنما يهتم بكميات وتكرارات ومقادير هذه الأنواع؛ فمثلاً بالنسبة لجنسيات المدرسين فإن الذي يهم الطرق الإحصائية هو أعداد المدرسين من كل جنسية، كذلك أنواع الأعمال بأحد المصارف فإن الذي يهمنا هو عدد كل نوع خلال فترة زمنية ما. كذلك من الملاحظ أن الظواهر النوعية الخاضعة للترتيب هي في الواقع بيانات كمية في الأصل ولكن الذي يهمنا هنا التعبير عنها كأنواع وليس ككميات مثل تقديرات النجاح، فمثلاً الممتاز هو الذي يحصل على درجات بين 85، 100 وقد تم التعبير عنه بصفة ممتاز لأنه يهمنا التقدير وليس الدرجة نفسها.

ومما سبق يتضح لنا أن البيانات أو الظواهر التي نعبر عن أحد عناصرها بعدها وحصرها فهي ظواهر منفصلة، والتي نعبر عن أحد عناصرها بقياسها فهي ظواهر متصلة، والتي نعبر عن أحد عناصرها بصفة أو نوع فهي ظواهر نوعية، مع ملاحظة أن الذي يحدد نوع الظاهرة هي طريقة التعبير عنها وليست طريقة الوصول لهذا التعبير؛ فمثلاً عند معرفة عدد نبض مريض قد نستخدم لذلك جهازاً يقيس هذا النبض، ولكن عند التعبير سوف نعبر عنه بأعداد صحيحة فقط.

2 ـ 4 تبويب البيانات الكمية

عند حصولنا على بيانات عن الظواهر الكمية المختلفة غالباً ما تكون هذه البيانات كثيرة العدد فهي لا تتبع أي نوع من أنواع الترتيب والتنظيم، أي أنها في وضع عشوائي يصعب فهم وتوضيح أية معلومة ببساطة عن هذه البيانات وهي على هذا الوضع، لذلك فقد دعت الضرورة إلى إيجاد طرق وأساليب تستخدم لتنظيم البيانات لتوضيح معالمها الأساسية التي تتلخص في معرفة القيمة الكبرى والصغرى وكيفية توزيع باقي القيم بين هاتين القيمتين،

وذلك بصور مختلفة تتوقف على طبيعة البيانات والمعلومات المراد توضيحها، ومن هذه الطرق الجداول التكرارية والرسومات البيانية والمقاييس الإحصائية المختلفة.

2 ـ 4 ـ 1 جدول التوزيع التكراري

الجداول التكرارية هي أول الطرق المستخدمة في وصف البيانات وأهمها، وتتلخص في وضع البيانات في صورة منظمة أطلق عليها إسم جدول، وأبسط أنواع الجداول وأساسها هو جدول التوزيع التكراري الذي يوضح قيم الظاهرة والتكرارات المناظرة لهذه القيم، كما هو موضح في المثال التالي:

مثال 1: البيانات التالية توضح عدد الأيام التي قضاها أحد المراجعين القانونيين لمراجعة حسابات 40 مؤسسة والمطلوب وضع هذه البيانات في صورة منظمة توضح معالمها الأساسية.

41, 36, 20, 10, 62, 58, 21, 46, 56, 41, 36, 26, 22, 46, 63, 57, 62, 58, 55, 63, 54, 66, 62, 56, 63, 56, 62, 58, 41, 63, 66, 63, 6, 57, 58, 57, 66, 58, 55, 66.

من الواضح رغم قلة عدد البيانات فليس من السهل معرفة معلومات عديدة عنها وهي على هذا الوضع، ولكن بمجهود بسيط يمكن الحصول على معلومات كثيرة توضح المعالم الأساسية لهذه البيانات. فإذا تم ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً مع تحديد تكرار كل قيمة ووضعت في صورة جدول يكون صفه (أو عموده) الأول يبين القيم وصفه (أو عموده) الثاني يبين التكرارات، وبذلك يمكننا معرفة وتوضيح الخصائص العامة لهذه البيانات كما هو موضح في الجدول التالي الذي يبين صفه الأول عدد الأيام والصف الثاني التكرار المناظر.

عدد الأيام	6	10	20	21	22	26	36	41	46	55	56	57	58	62	63	66	المجموع
التكرار	1	1	1	1	1	1	2	3	2	3	3	3	4	5	5	4	40

مما لا شك فيه أن وضع البيانات في هذه الصورة يمكّننا من معرفة معلومات عديدة كانت غير واضحة في الوضع الأصلي للبيانات. فمثلاً من السهل معرفة أصغر وأكبر عدد لأيام المراجعة ببساطة، والكيفية الموزعة بها باقي الأيام؛ فعلى سبيل المثال نلاحظ أن غالبية المؤسسات احتاجت إلى أكثر من شهر لمراجعة حساباتها مما يدل على كثرة الأعمال، الأمر الذي يتطلب عدداً أكثر من المراجعين لإنجاز العمل في وقت أقل.

ومن الواضح أنه لو كانت البيانات كثيرة ومنتشرة داخل مجال واسع فوضعها في صورة الجدول السابق لن يفي بالغرض المطلوب والأساسي للجداول وهو تلخيص البيانات بطريقة منظمة وبسيطة وسهلة توضح معالمها الأساسية لإعطاء فكرة عامة عن هذه البيانات، لأن وضع الجدول على الشكل السابق لن يختلف كثيراً عن الوضع الأصلي، لذا فقد دعت الحاجة إلى طريقة أخرى يمكن استخدامها تكون أكثر فائدة وأكبر اختصاراً من الوضع الأصلي للبيانات لتوضيح معالمها الأساسية، وتتلخص هذه الطريقة في التعامل مع البيانات كمجموعات بدلاً من التعامل معها كقيم مفردة لأن الذي يهمنا هنا هو الحصول على فكرة عامة وليس القيم كل على حدة، وذلك بتقسيم المجال الذي تنتشر فيه - أي الذي توجد به البيانات - إلى أجزاء نسميها فترات، قد تكون متساوية أو غير متساوية الطول تبعاً لطبيعة البيانات والغرض العام المعمول من أجله الجدول مع حصر القيم بكل فترة، وعليه سوف نحصل على جدول مكون من فترات وتكرارات مقابلة لكل فترة يسمى بجدول التوزيع التكراري. ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال 2: إذا كانت درجات 50 طالباً في اختبار لمقرر ما كما يلي:

38, 18, 67, 21, 82, 28, 36, 54, 62, 74, 98, 81, 76, 45, 52, 66, 72, 69, 71,

77, 65, 47, 68, 86, 73, 62, 84, 75, 63, 44, 39, 12, 78, 59, 64, 83, 92, 68,
55, 52, 59, 56, 82, 79, 74, 61, 66, 67, 68, 46.

والمطلوب: وضع هذه البيانات في صورة جدول تكراري.

من الواضح أنه ليس من السهل الحصول على فكرة عامة عن هذه البيانات بوضعها الحالي، عليه نحاول تلخيصها عن طريق وضعها في صورة جدول تكراري يوضح معالمها الأساسية وذلك كما يلي:

أ - نحدد المجال الذي توجد به البيانات وهو عبارة عن أكبر قيمة مطروحاً منها أصغر قيمة، أي أن المجال = 98 − 12 = 86.

ب - نقسم هذا المجال إلى عدد مناسب من الفترات (وللتبسيط فقط) نعتبر الفترات متساوية الطول. فإذا أخذنا طول الفترة 10 نحصل على 9 فترات.

جـ - نضع الجدول في صورة أفقية (أو رأسية) حيث يخصص الصف (أو العمود) الأول للفترات والصف (أو العمود) الثاني لعلامات الحصر التي يتم بواسطتها نقل البيانات في الجدول بسهولة، ويكون الصف الأخير للتكرارات المناظرة لكل فترة.

د - كل فترة لها بداية ونهاية تسمى البداية بالحد الأدنى والنهاية بالحد الأعلى وعليه يجب أن تكون بداية الجدول أي الحد الأدنى للفترة الأولى مساوياً لأصغر قيمة بالبيانات أو أقل منها بمقدار أقل من طول الفترة، ويكون الحد الأعلى للفترة الأخيرة مساوياً لأكبر قيمة بالبيانات أو أكبر منها بمقدار أقل من طول الفترة حتى نضمن أن الجدول يشمل كل البيانات ولا وجود لفترات زائدة تكراراتها أصفار لا فائدة منها في بداية الجدول أو في نهايته.

وبذلك تكون الفترات لهذه البيانات هي:

10 – 20، 20 – 30، 30 – 40، 40 – 50، 50 – 60، 60 – 70، 70 – 80، 80 – 90، 90 – 100 .

هـ ـ نبدأ بنقل البيانات وذلك بتحديد الفترة التي تنتمي إليها القيمة الأولى بوضع علامة حصر (|) في الخانة المعدة لذلك المقابلة لتلك الفترة، ثم نأخذ القيمة الثانية وهكذا حتى القيمة الأخيرة بالبيانات فنحصل على الجدول المطلوب الذي يسمى بجدول التوزيع التكراري كما هو موضح أدناه .

جدول التوزيع التكراري لدرجات 50 طالباً في اختبار لمقرر ما

الفترة	10 ـ 20	20 ـ 30	30 ـ 40	40 ـ 50	50 ـ 60	60 ـ 70	70 ـ 80	80 ـ 90	90 ـ 100	المجموع
علامات الحصر	ǀǀ	ǀǀ	ǀǀǀ	ǀǀǀǀ	卌 ǀǀ	卌 卌 ǀǀǀǀ	卌 卌	卌 ǀ	ǀǀ	
التكرار	2	2	3	4	7	14	10	6	2	50

ملحوظة :

نحصل على الجدول التكراري في صورته النهائية بحذف خانة علامات الحصر فيبين الفترات وتكراراتها فقط، مع وضع عنوان للجدول يدل على نوع البيانات ووحدة قياسها .

عند تحديد الحد الأدنى والأعلى لكل فترة توجد ثلاث طرق يمكن اتباعها يتوقف استخدام كل طريقة منها على طبيعة قياس البيانات والغرض المعمول من أجله الجدول . وهذه الطرق هي :

أ ـ الحد الأعلى للفترة ليس من ضمن الفترة بل ينتمي إلى الفترة التي تليها، وبذلك فإن الفترة الأولى تشمل كل القيم بداية من الحد الأدنى إلى أقل من الحد الأعلى، والفترة الثانية تشمل كل القيم من الحد الأعلى للفترة الأولى إلى أقل من الحد الأعلى للفترة الثانية وهكذا . فمثلاً في الجدول

السابق تكون الفترة الأولى من 10 إلى أقل من 20 والفترة الثانية من 20 إلى أقل من 30 وهكذا . ويمكن كتابة هذه الفترات على النحو التالي : 10 إلى أقل من 20، 20 إلى أقل من 30 أو 10 – 20، 20 – 30 أو 10 ـ، 20 ـ، 30 ـ . ومن الواضح أنه يجب اتباع هذه الطريقة في الجدول السابق حتى يمكننا معرفة وتحديد عدد الناجحين ببساطة ودون غموض .

ب ـ الحد الأعلى لكل فترة يعتبر من ضمن الفترة نفسها، أي أن الفترة الأولى تمتد من الحد الأدنى لها حتى الحد الأعلى، والفترة الثانية تمتد من أكبر من الحد الأعلى للفترة الأولى حتى الحد الأعلى للفترة الثانية وهكذا .

فمثلاً نقول أن الفترة الأولى تبدأ من 10 إلى 20 والفترة الثانية تبدأ من أكبر من 20 إلى 30 وهكذا . من الواضح أن هذه الطريقة لا نستطيع استخدامها في الجدول السابق لأننا لا نستطيع معرفة عدد الناجحين المتحصلين على درجة 50 في الفترة أكبر من 40 ـ 50 .

جـ ـ التعامل مع الحدود الحقيقية

عند تحديد الفترات حسب المجال الموجودة به البيانات سوف يكون لكل فترة حدان ظاهريان مكتوبان تبعاً للتقريب المستخدم في قياس البيانات . فمثلاً البيانات المكتوبة بأعداد صحيحة يعني ذلك أنه قد تم تقريب الكسور إلى أعداد صحيحة، فالفترة 10 ـ 20 هي في الواقع تشمل جميع القيم المحصورة بين 9.5 ,20.5 وعليه ظهر للفترة حدان آخران هما 9.5 - 20.5 . فقد سمي بالحدين الحقيقيين حيث 9.5 الحد الأدنى الحقيقي، 20.5 الحد الأعلى الحقيقي، وسمي الحدان 10، 20 بالحدين الظاهريين وهكذا لباقي الفترات .

ومن الواضح أن الحدود الحقيقية للفترات تتوقف على الدقة المتبعة في القياس، أي تعتمد على التقريب المستخدم في كتابة البيانات ووحدة قياسها . فإذا كانت البيانات مكتوبة بأعداد صحيحة فقط تكون وحدة القياس الواحد

الصحيح، وإذا كانت مكتوبة بخانة عشرية واحدة تكون وحدة القياس 0.1، وإذا كانت البيانات مكتوبة بخانتين عشريتين تكون وحدة القياس 0.01 وهكذا. وبصورة عامة يتم الحصول على الحدين الحقيقيين من الحدين الظاهريين كما يلي:

الحد الأدنى الحقيقي = الحد الأدنى الظاهري − $\frac{1}{2}$ وحدة قياس

الحد الأعلى الحقيقي = الحد الأعلى الظاهري + $\frac{1}{2}$ وحدة قياس

فمثلاً الفترة التي حداها الظاهريين 0.2 ,0.4 يكون حداها الحقيقيان هما:

$$0.15 = 0.05 - 0.2 = 0.1 \times \tfrac{1}{2} - 0.2$$

$$0.45 = 0.05 + 0.4 = 0.1 \times \tfrac{1}{2} + 0.4$$

وذلك لأن وحدة القياس هي: 0.1

والفترة 0.13 - 0.17 يكون حداها الحقيقيان 0.125 ,0.175، حيث وحدة قياسها 0.01 ونصف وحدة القياس 0.005، والفترة 1.12 - 1.4 تكون بالحدود الحقيقية 1.115 - 1.405 وذلك لأن وحدة القياس هي 0.01 وهكذا.

وحيث أن الغرض الأساسي للجدول هو تلخيص ووصف البيانات بصورة عامة، فلن تؤثر الطريقة المستخدمة في إعداده تأثيراً كبيراً على هذا الغرض ما دامت متناسقة لكل الفترات وتؤدي إلى الحصول على المعلومات المطلوبة.

وعلى الرغم من أنه لا توجد طريقة وحيدة لوضع الجداول تصلح لكل أنواع البيانات الكمية، إلاّ أنه هناك بعض النقاط الأساسية المهمة التي يجب مراعاتها بصورة عامة والتي تتلخص في ما يلي:

1 ـ يجب أن لا يكون عدد الفترات كبيراً حتى لا تتشتت المعلومات على فترات عديدة وبالتالي لا يكون هناك فرق كبير بين البيانات على وضعها

الأصلي ووضعها في صورة الجدول، كما ينبغي ألا يكون عدد الفترات قليلاً جداً مما يؤدي إلى دمج المعلومات في فترات قليلة وبالتالي لا يوضح الجدول الغرض المعمول من أجله في الحصول على فكرة عامة شاملة عن البيانات. وقد اعتبر العدد المناسب للفترات يتراوح بين 5، 25 فترة، وقد وضع «استرجس» علاقة رياضية يمكن الاستفادة منها في تحديد عدد الفترات وهي:

عدد الفترات = 1 + 3.3 لو ن، حيث ن عدد البيانات المراد جدولتها، لو يرمز للوغارتم للأساس 10 .

2 ـ يجب اتباع طريقة واحدة في تحديد الحدود الظاهرية للفترات بحيث لا يكون هناك تداخل أو فجوات بين الفترات.

3 ـ يفضل أن يكون طول الفترات متساوياً إلاّ إذا دعت الحاجة لخلاف ذلك لسبب أو لآخر. فمثلاً إذا كانت الدراسة المتعلقة بالبيانات المراد جدولتها هو الاهتمام بالتوزيع التكراري داخل فترات معينة فإنه يمكن دمج الفترات الأخرى في فترة واحدة؛ فإذا كانت الدراسة عن توزيع دخل مجموعة من المنتجين للاهتمام والتركيز على محدودي الدخل ففي هذه الحالة يمكن دمج باقي البيانات في فترة واحدة، كذلك إذا كانت البيانات تدل على درجات طلبة وكان الاهتمام بتوضيح أعداد الطلبة حسب التقديرات المختلفة نجد هنا أن طبيعة الظاهرة (الدرجات) تؤدي إلى الحصول على فترات غير متساوية الطول لأن التقديرات مختلفة التوزيع حيث يقابل تقدير ضعيف جداً الدرجات من 0 – 35 وتقدير ضعيف من 35 – 50 وتقدير مقبول من 50 – 65 وهكذا. كذلك إذا كانت التكرارات المناظرة لبعض الفترات قليلة جداً مقارنة بباقي التكرارات فإنه يمكن دمج هذه الفترات مع الفترة التي قبلها أو التي بعدها إذا لم يكن لهذه الفترات علاقة بموضوع الدراسة.

4 ـ بعد إعداد جدول التوزيع التكراري لا يمكن الرجوع منه إلى وضع البيانات الأصلية، ولكن نظير ذلك نحصل على تلخيص للبيانات توضح المعالم الأساسية، وتعطي فكرة عامة كان من الصعب بل من المستحيل الحصول عليها من الوضع الأصلي، وعليه يجب الاهتمام التام بكيفية وضع الجدول حتى يؤدي الغرض المطلوب.

5 ـ يجب تجنب الجداول ذات الفترات المفتوحة وهي التي تكون فترتها الأولى حدها الأدنى غير محدد أو فترتها الأخيرة حدها الأعلى غير محدد، كأن نقول الفترة الأولى أقل من 50 أو الفترة الأخيرة تكون أكبر من 100، لأن هذا النوع من الجداول قليل الأهمية الإحصائية.

6 ـ عند اختيار طول الفترة والحد الأدنى لها يجب مراعاة أن يكون الاختيار مناسباً يظهر القيم المهمة للظاهرة، مثل في حالة الدرجات يجب أن تظهر في الجدول الدرجات 35، 50، 65، 75، 85 لأنها مهمة في تحديد التقديرات، وتكون البيانات داخل كل فترة أقرب ما يمكن إلى منتصفها على الناحيتين، أي موزعة بانتظام داخل الفترة. وفي الواقع هذه الملاحظة تكتسب بالخبرة وكثرة إعداد الجداول وبذلك يجب إلقاء نظرة على جميع البيانات قبل تحديد طول الفترة والحد الأدنى للفترة الأولى، حتى نضمن الحصول على مقاييس إحصائية قريبة من الواقع كما سيتضح فيما بعد وقد سمي منتصف الفترة بالمركز وهو مساوٍ لنصف مجموع حديها. الأدنى والأعلى، أي أن مركز الفترة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{2}$

7 ـ يجب وضع عنواناً للجدول يوضح ما تدل عليه بياناته ووحدات قياسها.

2 ـ 4 ـ 2 جدول التكرار المتجمع الصاعد أو النازل (الهابط)

لقد اتضح لنا أن جدول التوزيع التكراري يبين ويعطي فكرة عن كيفية توزيع البيانات بين القيمة الصغرى والكبرى، ولكن نجد في كثير من الحالات أننا نود معرفة عدد القيم التي تقل أو تزيد عن قيمة معينة، فمثلاً في حالة توزيع الدرجات يفضل أن يوضح الجدول بسهولة عدد الناجحين أو الراسبين أو الحاصلين على تقديرات معينة، ومن الواضح أننا نحصل على ذلك بجمع التكرارات المناظرة للقيم التي تقل عن هذه القيمة المعينة فنحصل على ما يسمى بجدول التكرار المتجمع الصاعد، وإذا جمعنا التكرارات المناظرة للقيم التي تزيد عن قيمة معينة أي التكرارات اللاحقة لهذه القيمة نحصل على جدول التكرار المتجمع النازل، وفي حالة جدول التوزيع التكراري إذا جمعنا التكرارات عند أية فترة والتي قبلها تكون جدول التكرار المتجمع الصاعد، وإذا جمعنا التكرارات عند أية فترة والتي بعدها نحصل على جدول التكرار المتجمع النازل، ففي المثال السابق نحصل على هذين الجدولين كما يلي:

جدول 2: التكرار المتجمع الصاعد والنازل لمثال 1

الفترة	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
التكرار	2	2	3	4	7	14	10	6	2
القيمة فأقل	20	30	40	50	60	70	80	90	100
التكرار المتجمع الصاعد	2	4	7	11	18	32	42	48	50
القيمة فأكبر	10	20	30	40	50	60	70	80	90
التكرار المتجمع النازل	50	48	46	43	39	32	18	8	2

من الواضح أنه عند تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد نتعامل مع الحدود العليا للفترات بينما عند الحصول على جدول التكرار المتجمع النازل نتعامل مع الحدود الدنيا للفترات.

2 ـ 4 ـ 3 جدول التكرار النسبي

بالإضافة إلى الجداول السابقة التي تلخص البيانات كل حسب الغرض المطلوب وجد أنه في كثير من الحالات سوف يكون الوصف والتلخيص أكثر فائدة إذا تم توضيح بيانات جدول التوزيع التكراري وجدول التكرار المتجمع الصاعد أو النازل في صورة نسبية من المجموع الكلي لعدد البيانات لكل فترة من فترات الجدول، فهذه الطريقة تساهم في توضيح الفكرة العامة عن البيانات حيث يكون الوصف أكثر شمولاً. فإذا كانت البيانات تعبر عن درجات مثلاً لن يكفي توضيح كيفية توزيعها وعدد الطلبة حسب التقديرات المختلفة بل يتطلب الأمر الحصول على نسبة كل تقدير حتى يكون الوصف أكثر فائدة ووضوحاً، كذلك إذا كانت البيانات تعبر عن عدد الطلبة أو المدرسين حسب الجنسيات المختلفة أو حسب البلديات. فمما لا شك فيه أنه بوضع هذه البيانات في صورة نسبية إلى العدد الكلي سوف نحصل على وصف أكثر وضوحاً وفائدة.

وعليه فالحصول على التكرار النسبي للبيانات المبوبة في الجداول السابقة تعتبر من الأمور الهامة التي تساهم في زيادة توضيح المعالم الأساسية للبيانات. فإذا أردنا تكوين جدول التكرار النسبي للبيانات في جدول 2 يكون على الشكل التالي:

جدول 3: التكرار النسبي لمثال 1

الفترة	10 ـ 20	20 ـ 30	30 ـ 40	40 ـ 50	50 ـ 60	60 ـ 70	70 ـ 80	80 ـ 90	90 ـ 100
التكرار	2	2	3	4	7	14	10	6	2
التكرار النسبي	2/50	2/50	3/50	4/50	7/50	14/50	10/50	6/50	2/50
النسبة المئوية	%4	%4	%6	%8	%14	%28	%20	%12	%4
التكرار المتجمع الصاعد	2	4	7	11	18	32	42	48	50
التكرار النسبي المتجمع الصاعد	%4	%8	%14	%22	%36	%64	%84	%96	%100

2 ـ 5 الجداول النوعية

في كثير من الحالات تصادفنا بيانات نوعية مقسمة حسب صفات وأنواع مختلفة وبنود وضعها في صورة منظمة، فمن الواضح أننا لا نستطيع جدولتها في جدول توزيع تكراري مقسم إلى فترات لأنه لا يكون لذلك أي معنى حيث لا وجود لمجال نقسمه إلى فترات، وعليه في مثل هذه الحالات نكون جدولاً نخصص الصف (أو العمود) الأول لتوضيح الأنواع والصفات الموجودة، ويكون الصف (أو العمود) الثاني يبين كميات أو مقادير أو تكرارات كل نوع على حدة، وبذلك نحصل على جدول يمكن تسميته جدولاً نوعياً. فمثلاً أعداد الطلبة بالمعاهد أو المراحل المختلفة، كميات السلع المتعددة التي تستوردها أو تصدرها الجماهيرية، كمية إنتاج مصنع جنزور من الأقمشة المختلفة، عدد الفنيين المؤهلين وغير المؤهلين بالبلديات أو المؤسسات المختلفة، بنود الميزانية السنوية لمؤسسة ما، كشف حساب أحد الزبائن خلال شهر ما... كل هذه البيانات وغيرها يمكن وضعها في جدول نوعي كما هو مبين في الجدول التالي الذي يوضح عدد الطلبة والمدرسين خلال الفترة 69/ 70، 84/ 85 .

جدول عدد الطلبة والمدرسين خلال العام الدراسي 69/ 70، 84/ 85

السنة / الصفة / المرحلة	70/69		85/84	
	طلبة وطالبات	مدرسين ومدرسات	طلبة وطالبات	مدرسين ومدرسات
رياض الأطفال	1261	39	14264	868
التعليم الابتدائي	310846	11122	775416	43593
التعليم الإعدادي	36316	2447	260257	21051
التعليم الثانوي العام	8304	803	80625	6350
التعليم الفني	1457	220	23657	2332
معاهد معلمين ومعلمات	4725	556	32746	2919
التعليم الجامعي والعالي	3663	262	34469	1725
المجموع	366572	15449	122146	77938

من الواضح أن استخدام مثل هذه الجداول كثير في جميع المجالات المختلفة.

2 ـ 6 الجدول المزدوج للبيانات الكمية

إذا كانت البيانات التي لدينا تعبر عن ظاهرتين فإنه يتم وضعها في صورة جدول مزدوج على النحو التالي:

1 ـ نحدد الصف الأول من الجدول لقيم الظاهرة الأولى والعمود الأول لقيم الظاهرة الثانية.

2 ـ نقسم مجال كل ظاهرة على حدة إلى فترات حسب ما تم شرحه سابقاً ونبين الفترات على الصف والعمود المخصص لكل منهما.

3 ـ نحدد قيمة العنصر الأول للظاهرة الأولى لأية فترة ينتمي إليها ونضع علامة حصر في الخانة المقابلة للفترة التي تنتمي إليها قيمة الظاهرة الثانية لهذا العنصر وهكذا بالنسبة إلى باقي العناصر حتى ننتهي من جميع البيانات.

4 ـ نكتب علامات الحصر بالأعداد المساوية لها وبذلك يكون العدد في كل خانة يدل على عدد التكرارات المقابلة للفترتين المتناظرتين على الصف والعمود. ولتوضيح الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال 3: البيانات الآتية تبين الدرجات التي تحصل عليها 40 طالباً في مقررين.

والمطلوب: تنظيم هذه البيانات في صورة جدول يوضح معالمها الأساسية.

الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
درجة المقرر 1	81	26	52	76	16	46	94	66	84	41	38	65	52
درجة المقرر 2	76	18	64	72	22	52	86	74	73	46	26	59	55

الطالب	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
درجة المقرر 1	21	48	61	75	67	26	97	78	37	69	87	31	79	58
درجة المقرر 2	36	41	83	72	71	35	93	68	46	62	71	42	86	64

الطالب	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
درجة المقرر 1	14	26	54	27	53	51	83	87	62	74	26	67	38
درجة المقرر 2	19	12	69	29	58	72	91	96	41	88	21	51	56

لتكوين جدول تكراري مزدوج يوضح كيفية توزيع درجات المقررين نتبع الطريقة السابق شرحها في تحديد الفترات لكل ظاهرة على حدة، وبالنظر لدرجات المقرر الأول نجد أن أقل قيمة 14 وأكبر قيمة 97 وبذلك يكون المجال = 97 − 14 = 83، أما بالنسبة لدرجات المقرر الثاني فإن المجال = 96 − 12 = 84 . فإذا أخذت طول الفترة للظاهرتين 10 مثلاً (مع ملاحظة أنه ليس من الضروري أن يكون طول الفترات متساوياً للظاهرتين) ونكون جدولاً يكون فيه الصف الأول يبين فترات المقرر الأول والعمود الأول لفترات المقرر الثاني، ثم نحدد الفترة التي تنتمي إليها درجة الطالب الأول في المقرر الأول وهي 81 التي تنتمي للفترة 80 ـ 90 ونضع علامة حصر في الخانة المقابلة لدرجته في المقرر الثاني وهي 76، أي في الخانة المقابلة للفترة 70 ـ 80 وهكذا حتى نهاية البيانات فنحصل على الجدول التالي:

القرار 1 / القرار 2	20 – 10	30 – 20	40 – 30	50 – 40	60 – 50	70 – 60	80 – 70	90 – 80	100 – 90	المجموع
20 – 10	(|) 1	(||) 2								3
30 – 20	(|) 1	(||) 2	(|) 1							4
40 – 30		(||) 2								2
50 – 40			(||) 2	(||) 2		(|) 1				5
60 – 50			(|) 1	(|) 1	(||) 2	(||) 2				6
70 – 60					(|||) 3	(|) 1	(|) 1			5
80 – 70					(|) 1	(||) 2	(||) 2	(|||) 3		8
90 – 80						(|) 1	(||) 2		(|) 1	4
100 – 90								(||) 2	(|) 1	3
المجموع	2	6	4	3	6	7	5	5	2	40

ملحوظة: لقد تم وضع علامات الحصر في كل خانة بين قوسين.

ومن هذا الجدول المزدوج نستطيع الحصول على جدول التوزيع التكراري لكل ظاهرة على حدة، فإذا جمعنا التكرارات أفقياً لكل فترة نحصل على جدول التوزيع التكراري لدرجات المقرر الثاني وقد سمي بالتوزيع

الهامشي لهذه الظاهرة للدلالة على أنه تم الحصول عليه من جدول مزدوج مع ظاهرة أخرى، وإذا جمعنا التكرارات لكل فترة رأسياً نحصل على التوزيع الهامشي للظاهرة الأولى، ومن الواضح أن وضع البيانات في صورة الجدول المزدوج سوف يعطي ويبين معلومات عن التوزيع المشترك للظاهرتين من المستحيل فهمها من الوضع الأصلي للبيانات رغم قلة عددها.

والسؤال الذي يطرح نفسه دائماً، كيف نعد ونصمم الجدول بغض النظر أكان من الجداول التكرارية أم الجداول النوعية؟

الإجابة على هذا السؤال بالتحديد ليست واضحة وثابتة حيث لا توجد قوانين يمكن استخدامها، ولكن هناك أسس عامة يجب مراعاتها واتباعها تمكننا من وضع جدول يوضح ويصف البيانات بطريقة سهلة وبسيطة وواضحة، وتتلخص هذه الأسس في ما يلي:

1 ـ الجداول الإحصائية بصورة عامة قد تكون بسيطة أو مركبة: فالجداول البسيطة تحتوي على بيانات لظاهرة واحدة أو صفة واحدة، أما الجداول المركبة فتحتوي على بيانات لأكثر من ظاهرة أو صفة واحدة، وفي كلتا الحالتين نوزع الصفات المراد جدولتها على البعدين الأفقي والرأسي أي على الصف والعمود بصورة واضحة خالية من أي تداخل بين الصفات أو تكرارها ونبدأ في حالة الجداول المركبة على الصف والعمود بالصفات والظواهر الأكثر شمولاً من غيرها مثل الزمن، المكان، الجنس، الجنسية، المؤهل وغيرها، وقد جرت العادة أن توضع الظواهر التي نود التركيز عليها في الجدول على البعد الأفقي (على الصف).

2 ـ يجب وضع البيانات ذات الطابع الواحد والقابلة للمقارنة بجوار بعضها حتى تكون المقارنة سهلة وبسيطة وواضحة. كذلك البيانات النسبية والمتوسطات يجب وضعها في الجدول قريبة من البيانات الأصلية المحسوبة منها.

3 ـ نحدد خانة بالجدول تبين مجموع الصفوف والأعمدة جزئياً وكلياً، لأنه في كثير من الحالات تفيد في توضيح المعلومات العامة عن البيانات.

4 ـ يجب وضع عنوان للجدول يبين ما تدل عليه البيانات ووحدة القياس المستخدمة لذلك، أو تخصيص خانة بالجدول توضح وحدات القياس إذا كانت مختلفة من صفة إلى أخرى.

2 ـ 7 وصف البيانات بيانياً

مما لا شك أن وصف البيانات يتطلبها المتخصصون ويحتاجها غيرهم لفهم ولمعرفة فكرة عامة عن معالمها الأساسية، وحيث أن الجداول بأنواعها تتطلب نوعاً من المهارة الخاصة، عليه فقد دعت الحاجة إلى طريقة أخرى يتم بها وصف البيانات، وبما أن الرسم يستخدم بصورة عامة لتوضيح ووصف المواقف المعبر عنها، فقد لجأ الإحصائيون إلى استخدام هذه الطريقة لوصف وتوضيح الفكرة العامة عن البيانات بسهولة أكثر مما كانت عليه في صورة الجداول، علماً بأنه لا يمكن الحصول على الرسومات الإحصائية إلاّ بعد تكوين الجداول بغض النظر عن نوعية البيانات المراد وصفها. والرسومات البيانية بجميع أنواعها كثيرة الاستخدام في كل المجالات وسوف نتعرض هنا لشرح بعض من أنواعها الأكثر استخداماً.

2 ـ 7 ـ 1 الرسومات البيانية للبيانات الكمية

هناك عدة طرق لوصف البيانات الكمية عن طرق الرسم منها: المدرج التكراري، المضلع التكراري، المنحنى التكراري ومنحنى التكرار المتجمع الصاعد (أو النازل)، يتوقف استخدام كل منها على طبيعة البيانات والغرض المستخدم من أجله الرسم.

أولاً ـ المدرج التكراري

يستخدم المدرج التكراري لوصف البيانات المعبرة عن ظاهرة واحدة

فقط تم وضع بياناتها في صورة جدول توزيع تكراري وذلك كما يلي:

1 ـ الحصول على جدول التوزيع التكراري.

2 ـ نحدد المحور الأفقي على ورقة الرسم لقيم الظاهرة (الفترات) والمحور الرأسي للتكرارات المناظرة.

3 ـ نحدد مقياس رسم مناسب على المحور الأفقي (محور السينات) على النحو التالي:

إذا كانت الفترات بالجدول متساوية الطول نقسم المسافة المتاحة على هذا المحور إلى أجزاء متساوية حسب عدد فترات الجدول وتكون بداية القياس الحد الأدنى للفترة الأولى والنهاية الحد الأعلى للفترة الأخيرة. أما إذا كانت أطوال الفترات غير متساوية فتحدد المجال الذي تنتشر فيه البيانات وهو الحد الأعلى للفترة الأخيرة مطروحاً منه الحد الأدنى للفترة الأولى ونقسم الناتج على الطول المتاح على هذا المحور ونقرب النتيجة إلى أقرب وحدة قياس يسهل التعامل بها فنحصل بذلك على مقياس الرسم على المحور الأفقي، أي تحديد وحدة القياس على المحور بما يقابلها من وحدات للبيانات الأصلية، مع الأخذ في الاعتبار عدم ضرورة البداية من نقطة الأصل على هذا المحور.

4 ـ نحدد مقياس الرسم على المحور الرأسي وذلك بقسمة أكبر تكرار بالجدول على الطول المتاح لهذا المحور في ورقة الرسم مع تقريب الناتج إلى وحدة قياس يسهل التعامل بها مع ضرورة البداية من نقطة الأصل (الصفر) على هذا المحور.

5 ـ نحدد بداية ونهاية كل فترة على المحور الأفقي، ثم نبدأ بالفترة الأولى برسم مستطيل يكون أحد ضلعيه طول الفترة والضلع الآخر مساوياً للتكرار المقابل لها إذا كانت الفترات متساوية الطول، أما إذا كانت غير

متساوية الطول فيجب حساب التكرار المعدل الذي يتناسب مع التكرار الأصلي وذلك كما يلي:

نختار أحد أطوال الفترات ونعتبره أساس التناسب ثم نقسم هذا الطول على طول الفترة ونضرب الناتج في تكرارها فنحصل على التكرار المعدل لهذه الفترة وبذلك يكون:

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{طول الفترة المختارة}}{\text{طول فترة التكرار}} \times \text{تكرار الفترة}$$

ويتم حساب التكرار المعدل لكل فترات الجدول، وهذا راجع لأن مساحة المستطيل للفترة هي التي تعبر عن التكرار وليس ارتفاعه، أي أن:

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= طول الفترة × الارتفاع

= طول الفترة × كثافة التكرار

$$= \text{طول الفترة} \times \frac{\text{تكرار الفترة}}{\text{طول الفترة}} = \text{تكرار الفترة}$$

وبذلك يتضح أن الارتفاع يتناسب مع التكرار؛ فإذا كان طول الفترات متساوياً يكون التناسب ثابتاً وإلاّ فإن الارتفاع يكون مساوياً للتكرار المعدل، أي نسبة من التكرار الأصلي مساوية لنسبة تغيير طول الفترة المختارة كأساس للمقارنة إلى طول الفترة الجديدة. فإذا كان مثلاً طول الفترة المختارة هو 10 وطول الفترة التي نود حساب تكرارها المعدل هو 30 عليه فإن التكرار المعدل = $10/_{30}$ × التكرار للفترة.

6 ـ نرسم الفترة الثانية بحيث تكون بدايتها هي نهاية الفترة الأولى ونحدد تكرارها (أو التكرار المعدل) على المحور الرأسي وتكوّن مستطيلاً كما في الفترة الأولى وهكذا حتى الفترة الأخيرة فنحصل بذلك على ما يسمى بالمدرج التكراري.

مثال: البيانات التالية تبين مبالغ الصكوك المدفوعة في أحد الأيام بأحد المصارف والمطلوب توضيح هذه البيانات عن طريق الرسم المناسب مع التعليق على الرسم.

المبلغ	200 – 100	300 – 200	400 – 300	500 – 400	600 – 500	700 – 600	800 – 700	900 – 800	1000 – 900	المجموع
عدد الصكوك	120	296	180	75	25	15	10	3	2	726

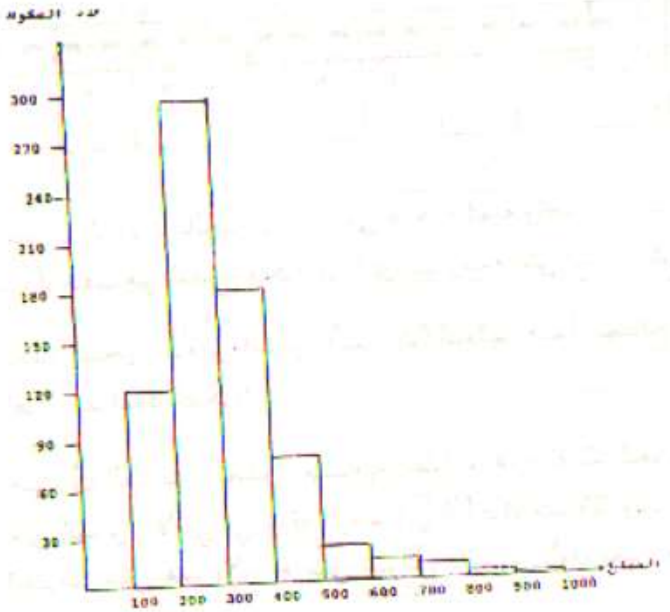
بما أن البيانات بالجدول تدل على ظاهرة كمية واحدة، عليه فالرسم المناسب لوصفها هو المدرج التكراري الذي يتم رسمه على النحو التالي.

أ ـ نحدد المحور الأفقي (محور السينات) لتمثيل قيمة المبالغ ومحور الصادرات لعدد الصكوك.

ب ـ حيث أن الفترات بالجدول متساوية الطول، عليه نقسم الطول المتاح على المحور الأفقي في ورقة الرسم إلى 9 أجزاء متساوية ونكتب حدود الفترات على هذه الأجزاء على التوالي فالجزء الأول يعبر عن الفترة 100 ـ 200 وهكذا.

جـ ـ نحدد مقياس الرسم على المحور الراسي وذلك بقسمة أكبر تكرار بالجدول وهو 296 على الطول المتاح على هذا المحور وهو 20 سم ونقرب الناتج إلى وحدة قياس يسهل التعامل بها، أي مقياس الرسم $= \frac{296}{20} = 14.8 = 15$ أي أن كل اسم على البعد الرأسي يقابل 15 صكاً.

د ـ نحدد تكرار الفترة الأولى على المحور الرأسي ونرسم مستطيلاً عرضه يقابل طول الفترة وارتفاعه تكرار الفترة، وهكذا بالنسبة لباقي الفترات، فنحصل بذلك على الرسم الموضح في الشكل (1) التالي الذي يسمى المدرج التكراري.



شكل 1 ـ المدرج التكراري لمبالغ 726 صكاً تم صرفها في أحد الأيام

مثال: الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلبة في اختبار لمقرر الإحصاء. والمطلوب وصف هذه البيانات عن طريق الرسم المناسب.

الدرجة	0-	35-	50-	65-	75-	85 ـ 100	المجموع
عدد الطلبة	14	22	40	60	34	8	178

حيث أن البيانات بالجدول تعبر عن ظاهرة كمية واحدة، عليه فالرسم المناسب لوصفها هو المدرج التكراري وذلك على النحو التالي:

1 ـ نختار المحور الأفقي لتمثيل قيم الظاهرة والمحور الرأسي للتكرارات.

2 ـ حيث أن فترات الجدول غير متساوية الطول، عليه نحدد مقياس الرسم المناسب وذلك بقسمة المجال الذي توجد به البيانات وهو 100 على الطول المتاح على هذا المحور وهو 20 سم، فنحصل على المقياس المناسب وهو 5 وحدات قياس لكل 1 سم.

3 ـ نحدد حدود الفترات على المحور الأفقي تبعاً لمقياس الرسم.

4 ـ نحسب التكرار المعدل لكل فترة لأن أطوال الفترات غير متساوية وذلك كما يلي:

أ ـ نختار أحد أطوال الفترات التي نبني عليها التناسب وليكن 15 .

ب ـ نحسب التكرار المعدل لكل فترة من العلاقة التالية:

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{طول الفترة المختارة}}{\text{طول فترة التكرار}} \times \text{تكرار الفترة}$$

وبذلك يكون التكرار المعدل للفترات هو كما يلي:

التكار المعدل للفترة الأولى $= \frac{15}{35} \times 14 = 6$

التكرار المعدل للفترة الثانية $= \frac{15}{15} \times 22 = 22$

التكرار المعدل للفترة الثالثة $= \frac{15}{15} \times 40 = 40$

التكرار المعدل للفترة الرابعة $= \frac{15}{10} \times 60 = 90$

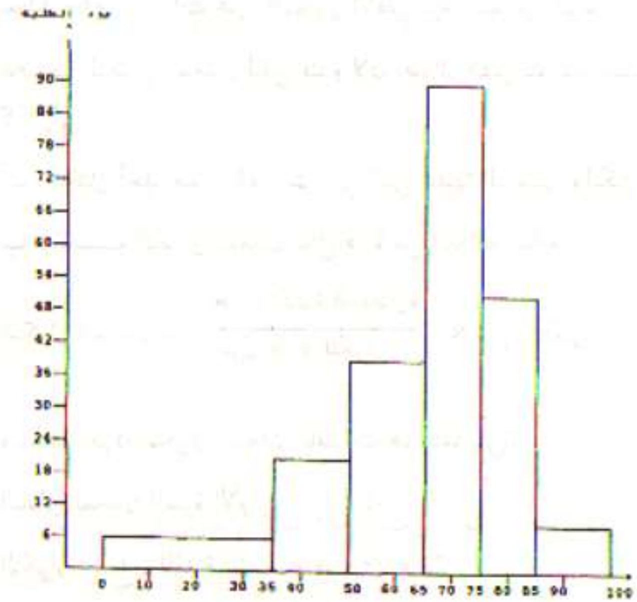
التكرار المعدل للفترة الخامسة $= \frac{15}{10} \times 34 = 51$

التكرار المعدل للفترة السادسة $= \frac{15}{15} \times 8 = 8$

5 ـ نحدد مقياس الرسم المناسب على المحور الرأسي وذلك بقسمة أكبر تكرار معدل وهو 90 على الطول المتاح على هذا المحور وهو 15

فنحصل على المقياس المطلوب وهو 6 وحدات قياس لكل 1 سم.

6 ـ نرسم مستطيلاً عرضه طول الفترة الأولى وارتفاعه التكرار المعدل لها، ثم الفترة الثانية وهكذا إلى الفترة الأخيرة بالجدول فنحصل على المدرج التكراري الموضح في الشكل (2).



شكل 2 المدرج التكراري لتوزيع درجات 178 طالباً في اختبار مقرر الإحصاء

ثانياً: المضلع التكراري

في كثير من الحالات تصادفنا بيانات كمية لأكثر من ظاهرة واحدة ونود وصفها عن طريق الرسم في هذه الحالة لا نستطيع استخدام المدرج التكراري حيث يصبح المدرج غير واضح وغير مفهوم لتداخل المستطيلات وقد يحدث

تداخل للفترات كذلك، عليه فقد وجدت طريقة أخرى يتم بها وصف هذه البيانات هي استخدام ما يسمى بالمضلع التكراري وذلك على النحو التالي:

1 ـ نحسب مراكز الفترات.

2 ـ نحدد مراكز الفترات على المحور الأفقي باختيار مقياس الرسم المناسب وذلك بأسلوب مماثل لما سبق شرحه في حالة الفترات المتساوية أو غير المتساوية الطول، ثم نحدد التكرارات المقابلة لهذه المراكز (باعتبار التكرار موزعاً بانتظام داخل الفترة وعليه يقابل مركزها) ونرسم نقطاً لكل ظاهرة تختلف في الشكل من ظاهرة إلى أخرى حتى يتم التمييز بين الظواهر ببساطة، ثم يتم توصيل نقاط كل ظاهرة بقطع مستقيمة فنحصل على ما يسمى بالمضلع التكراري.

3 ـ نحدد المحور الأفقي لقيم الظواهر والمحور الرأسي للتكرارات.

مثال: يبين الجدول التالي توزيع دخل مجموعة من المنتجين لمصنعين، فوضح هذه البيانات عن طريق الرسم المناسب.

الدخل / عدد العاملين	200 ـ 150	250 ـ 200	300 ـ 250	350 ـ 300	400 ـ 350	450 ـ 400	500 ـ 450
بالمصنع 2	10	84	210	156	64	15	2
بالمصنع 1	23	28	162	100	30	12	4

حيث أن الجدول يحتوي على بيانات كمية لظاهرتين، عليه فإن الرسم المناسب لوصفها هو المضلع التكراري الذي يتم رسمه على النحو التالي:

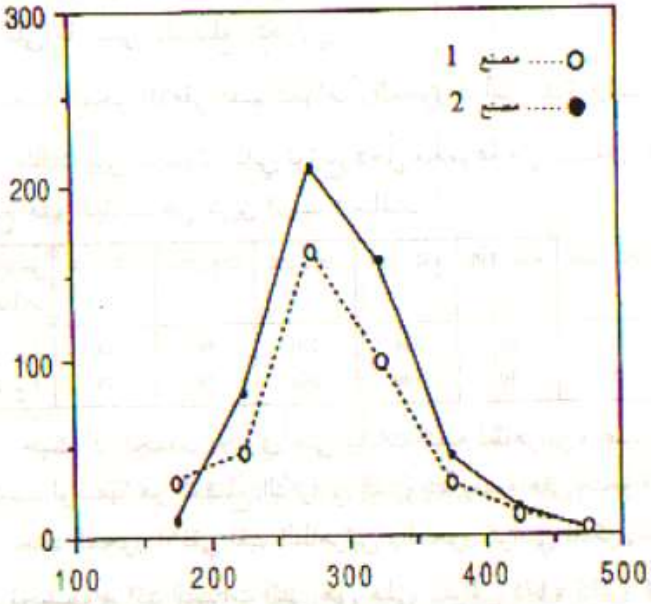
أ ـ نحدد المحور الأفقي لقيم الظاهرتين والمحور الرأسي للتكرارات.

ب ـ نحسب مراكز الفترات التي هي على التوالي 175، 225، 275، 325، 375، 425، 475 ثم نحدد مقياس الرسم على هذا المحور وذلك بقسمة المجال الذي تنتشر فيه المراكز وهو 475 − 175 = 300 على الطول المتاح وهو 14 وتقريب الناتج لأقرب وحدة قياس، وعليه يكون مقياس

الرسم = $\frac{300}{14} = 21.4 \simeq 25$، أي لكل 25 وحدة قياس من البيانات على هذا المحور يقابلها 1 سم على الرسم.

جـ ـ نحدد مقياس الرسم عى المحور الرأسي وذلك بقسمة أكبر تكرار في الجدول وهو 210 على الطول المتاح على هذا المحور وهو 21، عليه يكون مقياس الرسم $\frac{210}{21} = 10$.

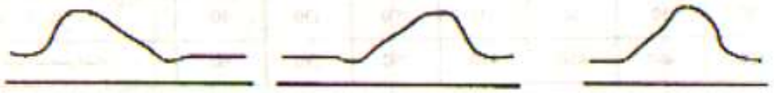
د ـ نرسم النقط المقابلة للتكرارات لكل مركز للظاهرتين مع إمكانية التمييز بين نقط كل ظاهرة على حدة ثم نصل نقاط كل ظاهرة بقطع مستقيمة فنحصل على المضلع التكراري المبين في شكل (3)



شكل 3 ـ توزيع دخل مجموعة من المنتجين بمصنعين

ثالثاً: المنحنى التكراري

عرفنا أن المدرج التكراري والمضلع التكراري يستخدمان لوصف البيانات التي عادة ما تكون محدودة العدد ولكن إذا زاد عدد البيانات زيادة لانهائية وصغرت أطوال الفترات نلاحظ أن المدرج التكراري والمضلع التكراري يؤولان إلى ما يسمى بالمنحنى التكراري الذي يستخدم عادة في وصف بيانات عن المجتمعات الكبيرة، ومن الواضح أن الشكل العام لهذا المنحنى سوف يتوقف على كيفية توزيع البيانات. وفي الواقع أن المنحنى التكراري له أشكال عديدة أشهرها المنحنى المتماثل (الطبيعي) والمنحنى الملتوي كما هو موضح في الشكل التالي:



منحنى متماثل   منحنى ملتو ناحية اليسار   منحنى ملتو ناحية اليمين

رابعاً: منحنى التكرار المتجمع الصاعد

يتم رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد وذلك بوضع الحدود العليا للفترات على المحور الأفقي والتكرار المتجمع الصاعد على المحور الرأسي بمقياس رسم مناسب وتحديد النقط المقابلة لكل حد أعلى والتكرار المتجمع الصاعد لها، ثم نصل هذه النقط بمنحنى يكون هو منحنى التكرار المتجمع الصاعد لهذه البيانات. والغرض الرئيسي لهذا المنحنى هو إمكانية الحصول من الرسم على أية قيمة (خلاف الحدود الدنيا والعليا) بالجدول يكون عدداً معين من القيم أقل منها وإيجاد مجموع التكرارات المقابلة لقيمة معينة فأقل.

مثال: الجدول التالي يبين توزيع أرصدة مجموعة من زبائن أحد المصارف والمطلوب رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنه أوجد:

1 ـ عدد الحسابات التي أرصدتها أقل من 7.5 ألف دينار.

2 ـ الرصيد الذي يوجد 200 من الزبائن أرصدتهم أقل منه.

مقدار الرصيد بالآلاف	2 ـ 0	4 ـ 2	6 ـ 4	8 ـ 6	10 ـ 8	12 ـ 10	14 ـ 12
عدد الزبائن	60	130	100	120	40	30	20

لرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد نتبع الخطوات التالية:

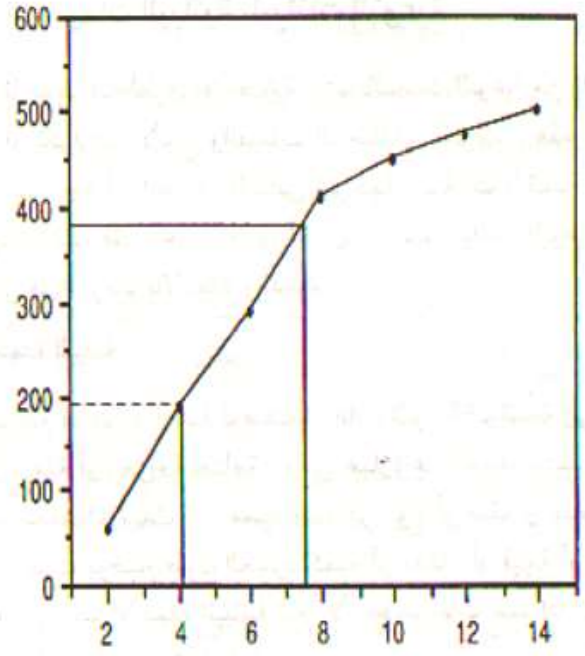
أ ـ نكون التكرار المجتمع الصاعد كما يلي:

الرصيد	2 ـ 0	4 ـ 2	6 ـ 4	8 ـ 6	10 ـ 8	12 ـ 10	14 ـ 12
عدد الزبائن	60	130	100	120	40	30	20
التكرار المتجمع الصاعد	60	190	290	410	450	480	500

ب ـ نحدد قيم الحدود العليا للفترات على المحور الأفقي والتكرار المتجمع الصاعد على المحور الرأسي بمقياس رسم مناسب كما تم شرحه سابقاً.

جـ ـ نحدد النقط المقابلة لكل حد أعلى والتكرار المجتمع الصاعد لها.

د ـ نصل النقط بمنحنى يكون هو منحنى التكرار المتجمع الصاعد كما هو موضح في الشكل التالي (شكل 4).



شكل (4) منحنى التكرار المتجمع الصاعد لأرصدة 500 زبون بأحد المصارف

1 ـ ولتحديد عدد الزبائن الذين أرصدتهم أقل من 7.5 ألف دينار، نرسم عموداً على المحور الأفقي من النقطة 7.5 يقابل المنحنى، في نقطة منها نرسم مستقيماً موازياً محور السينات يقابل المحور الرأسي في نقطة تكون هي عدد الزبائن المطلوب. ومن الرسم يتضح أن عدد الزبائن هو 385 .

2 ـ لتحديد قيمة الرصيد الذي يوجد 200 زبون أرصدتهم أقل منه، نحدد عدد الزبائن 200 على المحور الرأسي ومن هذه النقطة نرسم مستقيماً موازياً لمحور السينات يقطع منحنى التكرار المتجمع الصاعد في نقطة، منها ننزل عموداً على محور السينات فنقطة التقابل هي القيمة المطلوبة، ومن الرسم نجد أن الرصيد الذي يوجد 200 حساب أقل منه هو 4.2 ألف دينار.

2 ـ 7 ـ 2 الرسومات البيانية للبيانات النوعية

ذكرنا سابقاً أن الطرق الإحصائية تهتم بالبيانات النوعية من ناحية كميات أو مقادير أو تكرارات الأنواع والصفات المختلفة، ولتوضيح هذه البيانات عن طريق الرسم وجد أن الطريقة السابق شرحها للبيانات الكمية لا نستطيع استخدامها، وعليه فقد وجدت طرق أخرى لوصف البيانات النوعية عن طريق الرسم نذكر منها الرسم بالأعمدة والدائرة.

أولاً: الأعمدة البيانية

تستخدم الأعمدة البيانية لوصف البيانات النوعية المقسمة إلى صفات أو مناطق أو أزمنة أو أجزاء مختلفة، وهي عبارة عن أعمدة متساوية العرض والبعد عن بعضها، ويدل كل عمود منها عن نوع أو صفة واحدة من صفات البيانات، حيث يوضح طول العمود كمية أو مقدار أو قيمة أو تكرار تلك الصفة، ويتم رسم الأعمدة البيانية تبعاً لأنواع البيانات عما إذا كانت بيانات نوعية بسيطة أو مركبة وذلك كما يلي:

1 ـ البيانات النوعية البسيطة

إذا كانت البيانات التي نود وصفها عن طريق الرسم مقسمة إلى أنواع أو صفات بسيطة، يتم تحديد المحور الأفقي لتمثيل الأنواع وذلك بقسمة الطول المتاح على هذا المحور إلى أجزاء متساوية الطول حسب عدد الأنواع الموجودة مع ترك مسافات متساوية بين هذه الأجزاء، ونحدد المحور الرأسي لتمثيل الكمية أو القيمة أو التكرار المناظر لكل نوع وذلك باختيار مقياس الرسم المناسب على هذا المحور.

مثال: الجدول التالي يبين قيمة إجمالي المعاشات والمنح والمكافآت المختلفة المدفوعة للمستفيدين بنظام التقاعد من سنة 68 ـ 74 .

السنة	68	69	70	71	72	73	74
قيمة المدفوعات بالدينار	464551	1119972	996988	3501819	3947074	3776077	3740180

والمطلوب: توضيح هذه البيانات عن طريق الرسم المناسب

حيث أن البيانات بالجدول مقسمة إلى أزمنة مختلفة، عليه نستخدم لوصفها الأعمدة وذلك كما يلي:

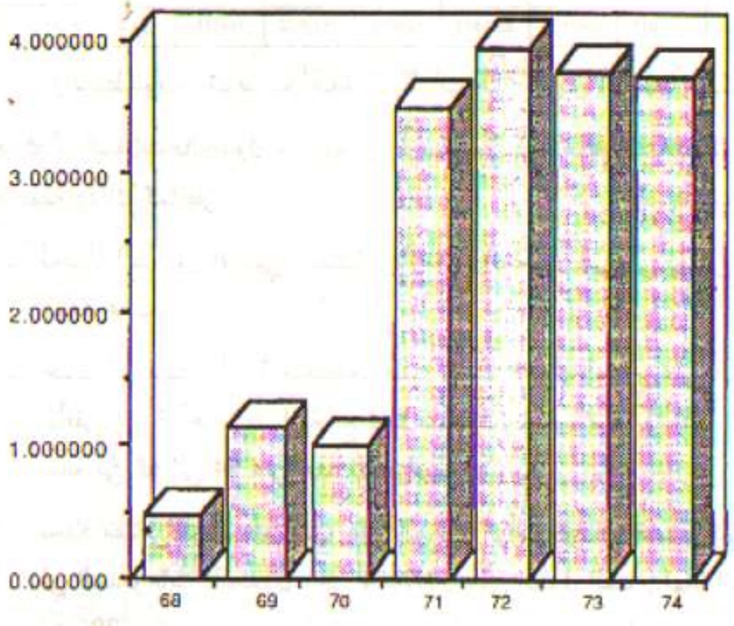
1 ـ نختار المحور الأفقي لتمثيل الأزمنة والمحور الرأسي لبيين قيمة المدفوعات.

2 ـ حيث أن لدينا 7 أزمنة مختلفة، عليه نقسم الطول المتاح على المحور الأفقي إلى 7 أجزاء متساوية مع ترك مسافات متساوية بينها ونكتب الأزمنة بداية من 68 إلى 74 على هذه الأجزاء.

3 ـ نحدد مقياس الرسم المناسب على المحور الرأسي وذلك بقسمة أكبر قيمة في المدفوعات بالجدول وهي 3947074 على الطول المتاح لهذا المحور وهو 20 سم.

وعليه نحصل على $\frac{3947074}{20} \simeq 200000$ لكل 1 سم.

4 ـ نرسم عموداً قاعدته الجزء الأول على المحور الأفقي وارتفاعه يقابل قيمة المدفوعات وهكذا لباقي الأجزاء فنحصل على الشكل التالي الذي يدل على الأعمدة البيانية لهذه البيانات:



الأعمدة البيانية لقيمة المدفوعات لنظام التقاعد من سنة 68 ـ 74

2 ـ البيانات النوعية المركبة

إذا كانت البيانات المراد وصفها عن طريق الرسم هي بيانات نوعية مركبة أي كل نوع مقسم إلى عدة صفات، في هذه الحالة يتم رسمها عن طريق الأعمدة البيانية بإحدى الطريقتين الآتيتين:

1 ـ التقسيم الأفقي للأعمدة   2 ـ التقسيم الرأسي للأعمدة.

1 ـ التقسيم الأفقي للأعمدة المتجاورة

يتم رسم الأعمدة البيانية للبيانات النوعية المركبة وذلك بقسمة المحور الأفقي إلى أجزاء تبعاً لعدد الأنواع الموجودة كما سبق مع تقسيم كل جزء بالتساوي حسب عدد الصفات الموجودة لكل نوع وذلك كما هو موضح في المثال التالي:

مثال: الجدول التالي يوضح أصول وخصوم خمس منشآت والمطلوب توضيح هذه البيانات عن طريق الرسم المناسب.

المنشأة	1	2	3	4	5
أصول د. ل	10000	12450	25360	7980	14670
خصوم د. ل	4000	8640	14280	2450	9490

حيث أن البيانات مقسمة إلى أنواع (منشآت) وكل منشأة لها صفتان أصول وخصوم عليه نستخدم الأعمدة البيانية كما يلي:

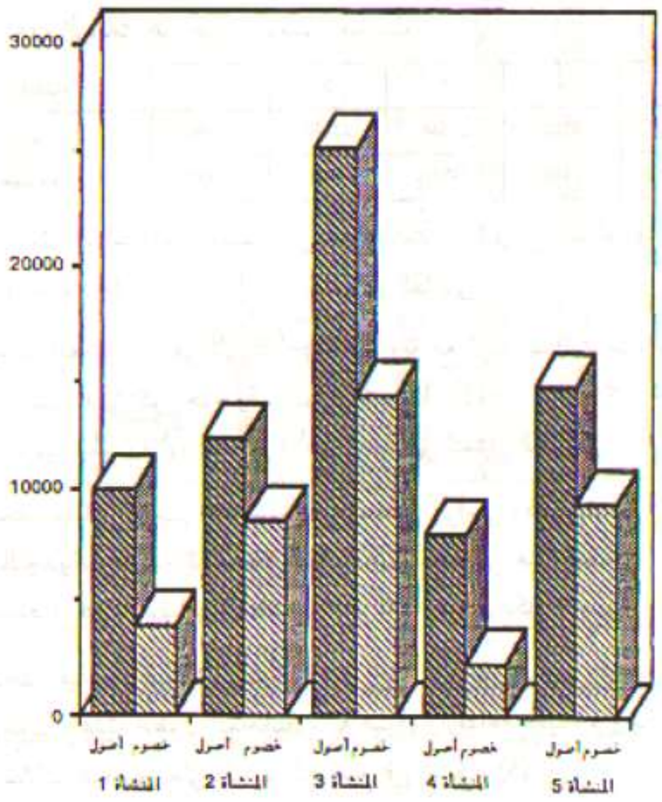
1 ـ نقسم المحور الأفقي إلى 5 أجزاء متساوية مع ترك مسافات متساوية بينها ونكتب على كل جزء رقم المنشأة من 1 ـ 5، ثم نقسم كل جزء إلى عمودين يكون الأول لتمثيل الأصول والثاني لتمثيل الخصوم.

2 ـ نحدد مقياس الرسم المناسب على المحور الرأسي وذلك بقسمة أكبر قيمة بالجدول وهي 25360 على الطول المتاح على هذا المحور وهو 26 فنحصل على المقياس المطلوب وهو 1000 د. ل لكل 1 سم.

3 ـ نحدد قيمة الأصول للمنشأة الأولى على المحور الرأسي ونرسم عموداً يكون قاعدته الطول المخصص للأصول وارتفاعه القيمة، وهكذا لباقي البيانات فنحصل على الرسم الموضح في الشكل (5).

4 ـ يمكن تلوين أو تخطيط الأعمدة للأصول والخصوم بطريقة تمكننا من التمييز بينهما.

(شكل 5)

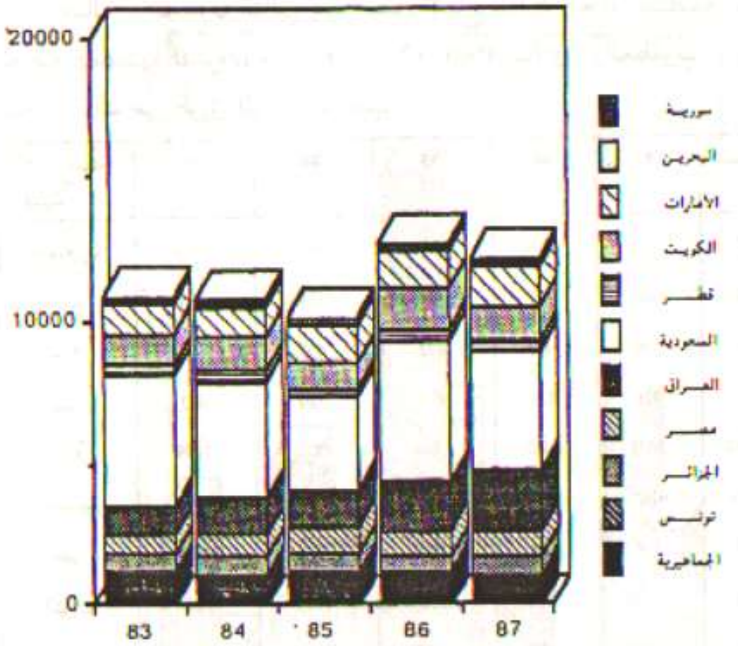


2 ـ التقسيم الرأسي للأعمدة المجزأة

إذا كانت البيانات النوعية المراد وصفها عن طريق الرسم كثيرة الأنواع وكل نوع مقسم إلى عدة أصناف، يكون من الأفضل في هذه الحالة تقسيم كل عمود رأسياً بدلاً من التقسيم الأفقي على أن يمثل طول العمود الكلي مجموع قيم الصفات لكل نوع مع ملاحظة ذلك في تحديد مقياس الرسم على المحور الرأسي، كما هو موضح في المثال التالي:

مثال: الجدول التالي يبين تطور إنتاج النفط الخام لمنظمة الأقطار العربية المصدرة للبترول من سنة 83 ـ 87 (1000 ب/ى) **والمطلوب:** توضيح هذه البيانات عن طريق الرسم المناسب:

السنة / الدولة	83	84	85	86	87	المجموع
الجماهيرية	1030	957	1024	1034	973	5018
تونس	115	114	108	107	100	544
الجزائر	661	695	672	600	634	3262
مصر	682	780	897	829	926	4112
العراق	1099	1222	1404	1688	2079	10492
السعودية	4569	4079	3175	5042	4205	21070
قطر	294	402	290	333	312	1631
الكويت	1052	1160	936	1416	1215	5779
الإمارات	1118	1142	1309	1370	1501	6440
البحرين	42	42	42	44	43	213
سورية	161	162	176	194	232	925
المجموع	10823	10755	9928	12657	12220	56383



شكل (6): إنتاج النفط الخام (1000 ب/ى) لمنظمة الأقطار العربية المصدرة للبترول سنة 83 ـ 87

ثانياً: الدائرة البيانية

تستخدم الدائرة البيانية كالأعمدة لوصف البيانات المقسمة إلى أنواع وصفات (ويفضل ألا تكون كثيرة العدد)، حيث تعبر مساحة الدائرة عن المجموع الكلي لقيم الأنواع المختلفة ويتم تقسيم المساحة إلى قطاعات حسب نسب قيم الأنواع الموجودة. وكما نعلم أن مساحة القطاع تتناسب مع زاويته المركزية، بذلك يتم تقسيم الزاوية المركزية وهي 360° حسب نسب قيم الأنواع.

مثال: البيانات التالية تبين أعداد المحاسبين والمراجعين بأمانتين.

والمطلوب: توضيح هذه البيانات عن طريق الرسم بالدائرة.

الصفة / الأمانة	محاسبون	مراجعون
1	120	30
2	80	10

لرسم الدائرة البيانية نتبع الخطوات الآتية:

1 ـ نحسب المجموع الكلي للبيانات بالجدول وهو 240 .

2 ـ نحسب التكرار النسبي لكل نوع كما يلي:

التكرار النسبي للمحاسبين بالأمانة 1 = $\frac{120}{240} = \frac{1}{2}$

التكرار النسبي للمحاسبين بالأمانة 2 = $\frac{80}{240} = \frac{1}{3}$

التكرار النسبي للمراجعين بالأمانة 1 = $\frac{30}{240} = \frac{1}{8}$

التكرار النسبي للمراجعين بالأمانة 2 = $\frac{10}{240} = \frac{1}{24}$

3 ـ نحسب مقدار الزاوية المركزية المقابلة لكل نسبة وهي:

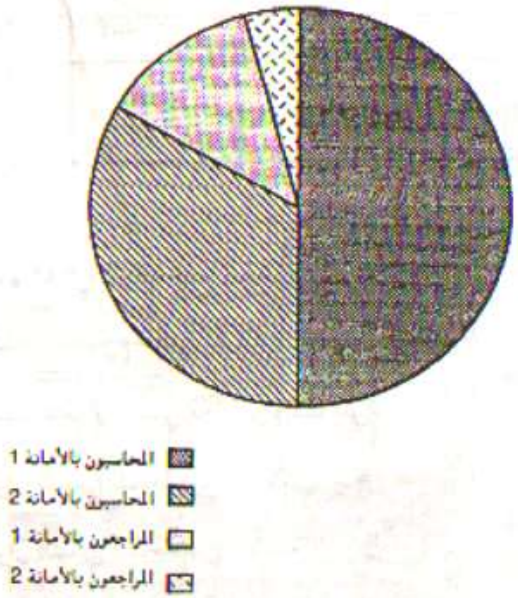
1 ـ عدد المحاسبين بالأمانة 1 يقابل $^1/_2 \times 360 = 180$ درجة .

2 ـ عدد المحاسبين بالأمانة 2 يقابل $^1/_3 \times 360 = 120$ درجة .

3 ـ عدد المراجعين بالأمانة 1 يقابل $^1/_8 \times 360 = 45$ درجة .

4 ـ عدد المراجعين بالأمانة 2 يقابل $^1/_{24} \times 360 = 15$ درجة .

4 ـ نرسم دائرة حسب المساحة المتاحة ونبدأ من أية نقطة بتحديد الزاوية المركزية المقابلة لكل نوع على التوالي فنحصل على الشكل التالي:



شكل (7): عدد المحاسبين والمراجعين بأمانتين

مما تقدم يتضح أن الرسومات البيانية بمختلف أنواعها هي طريقة تستخدم لوصف وتوضيح الفكرة العامة للبيانات، عليه حتى يؤدي الرسم الغرض المطلوب يجب مراعاة النقاط العامة الآتية:

1 ـ يجب اختيار الرسم المناسب للبيانات الكمية أو النوعية.

2 ـ يجب اختيار مقياس رسم مناسب بحيث يكون الرسم شاغلاً كل المساحة المتاحة للرسم وأن تكون كل البيانات واضحة على المحورين.

3 ـ نختار المحور الأفقي للظاهرة والمحور الرأسي للتكرار أو الكمية على أن

نبدأ القياس على المحور الرأسي من نقطة الأصل (من الصفر).

4 ـ يجب أن يكون الرسم دقيقاً سهلاً ليوضح الغرض الأساسي منه.

5 ـ يجب أن يكون مقياس الرسم واحداً لكل البيانات على كل محور حتى تكون المقارنة سهلة وواضحة.

6 ـ يجب كتابة عنوان للرسم يوضح طبيعة البيانات ووحدات قياسها.

تمارين 2

1 ـ أذكر نوع الظواهر التالية، ولماذا؟

أ ـ التخصصات المختلفة بالكلية.

ب ـ دخل العاملين بإحدى المؤسسات الشهر الماضي.

جـ ـ الميزانية الإدارية وميزانية التحول لأمانة التعليم للعشر سنوات الماضية.

د ـ عدد العاملين بأمانة الخزانة حسب الجنس والمؤهل.

هـ ـ جنسيات العاملين بأمانة الصحة.

و ـ الزمن الذي يتطلبه صرف 10 صكوك مختلفة.

ر ـ مبالغ الأرصدة بمصرف الأمة حسب نوع الحساب.

ز ـ مستوى الدقة في العمل لعشرة صرافين.

ل ـ عدد الطلبة بالكلية السنة الماضية.

م ـ عدد الطلبة بالكلية حسب العمر.

ن ـ كمية إنتاج النفط والغاز للدول العربية السنة الماضية.

ى ـ عدد المصارف التجارية حسب البلدية.

2 ـ أذكر مثالاً من عندك (بخالف الأمثلة في السؤال 1) لظاهرة نوعية خاضعة للترتيب وأخرى غير خاضعة للترتيب وثالثة منفصلة ورابعة متصلة.

3 ـ أذكر مثالاً لفترة تكون وحدة قياسها كما يلي:

0.001, 0.01, 0.1, 1

4 ـ أوجد الحدود الحقيقية للفترات التالية وبين وحدة القياس.

0.0001 - 0.001, 0.031 - 0.026, 1.011 - 1.2, 1 - 3, 11.6 - 10

(1.001-) - 1.01, 0.621 - (1-), (2.12-) - (1.1 -), (4-) - (2-)

5 ـ أوجد الحدود الظاهرية للفترات التي حدودها الحقيقية كما يلي وبين وحدة القياس.

0.45 - 0.65, 0.015 - 0.025, 0.225 - 0. 115, 0.5 - 1.5

(0.1235) - (0.1235-), (.035-) - (.015-), (2.75-) - (2.55-)

6 ـ أذكر نوع حدى الفترات التالية وأوجد الحدين المخالفين لما ذكرت وبين وحدة القياس.

2.225 - 2.115,. 035 - .012, 14 - 11, 1.05 - 1.25, 1.61 - 1.1

7 ـ أذكر الرسومات التي تستخدمها لوصف الظواهر في السؤال 1 .

8 ـ أذكر مع الشرح فائدة الجداول التكرارية بأنواعها مع توضيح إجابتك بأمثلة كلما أمكن ذلك.

9 ـ وضح بالرسم المناسب البيانات التالية مع حساب التكرار النسبي والتكرار المتجمع النسبي، وعلق على الرسم.

أ ـ البيانات التالية توضح عدد أيام الغياب للعاملين بأحد المصارف الشهر الماضي:

1, 0, 10, 1, 1, 6, 2, 0, 1, 2, 1, 2, 6, 1, 0, 9, 2, 1, 8, 3, 0, 4, 0, 0, 6, 8, 0,
3, 6, 0, 0, 4, 1, 0, 3, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 7, 4, 5, 0, 1, 1, 7, 0, 1, 9, 5, 5, 7, 5,
2, 8, 7, 2, 6, 5, 0, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 3, 1, 0, 2, 0.

ب ـ البيانات التالية توضح الزمن (بالدقيقة) الذي تطلبه صرف مجموعة من الصكوك بأحد المصارف:

44, 30, 59, 57, 55, 32, 29, 64, 61, 56, 38, 56, 10, 65, 21, 41, 6, 18, 27, 28, 32, 54, 42, 63, 41, 18, 29, 38, 56, 49, 26, 22, 47, 32, 48, 60, 53, 36, 29, 32, 40, 28, 52, 70, 47, 34, 66, 41, 11, 62, 36, 52, 41, 28, 9, 14, 17, 26, 31, 36, 27, 19, 21, 36, 25.

جـ ـ البيانات التالية تبين عمر مجموعة الآلات الحاسبة لأحد الأنواع:

1138, 940, 802, 1240, 807, 1017, 1136, 1120, 906, 430, 1176, 990, 510, 1070, 890, 1060, 1360, 748, 892, 1260, 450, 776, 980, 420, 890, 660, 920, 890, 760, 1190, 1070, 960, 1150, 1100, 1410, 930, 530, 690, 1350, 960, 1050, 1320, 1110, 1070, 1310, 810, 990, 1090, 1160, 1250.

د ـ البيانات التالية توضح جنسية وجنس مجموعة من العاملين بإحدى الأمانات من المؤهلين وغير المؤهلين، حيث ل ترمز لليبي، غ. ترمز غير الليبي، م. مؤهل أ. أنثى، ذ. ذكر.

ل م ذ، ل م أ، ل م ذ، غ ل م أ، ل غ م ذ، ل غ م أ، ل م أ، ل م ذ، ل م أ، ل غ م ذ، غ ل م أ، غ ل م ذ، غ ل م أ، ل م ذ، ل م أ، ل م أ، ل غ م ذ، ل غ م أ، ل م أ، ل م أ، ل م ذ، ل م ذ، ل م أ، غ ل م أ، غ ل م ذ، ل م أ، ل م ذ، ل غ م ذ، ل م أ، ل غ م أ، ل م أ، ل م ذ، ل م أ، ل م أ، غ ل م أ، غ ل م ذ، غ ل م ذ، غ ل غ م أ، غ ل م أ، غ ل م أ، ل م ذ، ل م أ، ل م ذ، ل م أ، غ ل م أ.

10 ـ وضح كيفية وضع جدول يبين الحالات التالية:

أ ـ عدد العاملين بأحد المصارف وذلك حسب الجنس وثلاث فترات للعمر أقل من 25، 25 ـ 45، أكبر من 45 وثلاث شرائح للدخل أقل

من 200، 200 ـ 350، 350 فأكثر، لثلاث بلديات للعامين الماضيين.

ب ـ كمية تكاليف 3 سلع تم استيرادها من 5 بلدان للثلاث سنوات الماضية.

جـ ـ نتائج طلبة الكلية حسب التقديرات والفصول المختلفة للعامين الجامعيين 89/ 90، 90/ 91 .

د ـ بنود ميزانية الكلية للعام 90/ 91 .

هـ ـ كشف درجات طالب بالكلية من بداية دراسته حتى تخرجه.

و ـ الجدول الدراسي لكلية بها 3 أقسام يوضح زمن ومكان المحاضرة إذا كانت الدراسة من الساعة 8 ـ 18 والكلية بها 4 سنوات دراسية.

11 ـ أكمل الجدول التالي الذي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلبة:

الدرجة	0 ـ	10 ـ	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ 80
العدد	3	9	27	—	—	6	—	3
التكرار النسبي	—	—	—	—	0.2	.08	.16	—

12 ـ البيانات التالية توضح توزيع دخل مجموعة من العاملين، بإحدى الأمانات وحسب مراكز الفترات، والمطلوب وصف هذه البيانات عن طريق رسم المدرج التكراري إذا علمت بأن أعلى دخل هو 600 .

مركز الفترة	200	250	350	460	550
العدد	10	20	50	40	5

13 ـ وضح بالرسم المناسب البيانات التالية:

أ ـ الجدول التالي يوضح المبيعات (بالألف دينار) لمجموعة من المنشآت.

المبيعات	3 ـ 0	6 ـ 3	9 ـ 6	12 ـ 9	15 ـ 12
القرطاسية	140	180	90	30	10
المواد المنزلية	90	210	190	70	50

ب ـ الجدول التالي يوضح دخل العاملين بأمانتين:

الدخل	150 ـ 100	200 ـ 150	250 ـ 200	300 ـ 250	500 ـ 300
الأمانة 1	120	310	480	200	60
الأمانة 2	160	410	260	80	40

جـ ـ الجدول التالي يبين عدد إنتاج مصنع قاريونس من ثلاثة أنواع لثلاث ورديات:

النوع / الوردية	1	2	3
1	360	390	220
2	400	520	300
3	200	240	400

حل تمارين الباب الثاني

1 ـ أ ـ ظاهرة نوعية غير خاضعة للترتيب لأنه يتم التعبير عن عناصرها بصفات وأسماء غير خاضعة للترتيب.

ب ـ 1) إذا عبرنا عن الدخل الإجمالي لكل العاملين فهي ليست ظاهرة لأنها تدل على رقم واحد ولا وجود لاختلافات.

2) إذا عبرنا عن دخل كل عامل على حدة فهي ظاهرة متصلة لأنه يعبّر عن عناصرها بعدد صحيح وكسر من وحدة القياس.

جـ ـ ظاهرة متصلة لأنه يعبر عن عناصرها بعدد صحيح وكسر.

د ـ ظاهرة منفصلة لأنه يعبّر عن عناصرها بأعداد صحيحة فقط.

هـ ـ ظاهرة نوعية غير خاضعة للترتيب لأنه يعبر عن عناصرها بصفات وأسماء لا تقبل الترتيب.

و ـ ظاهرة متصلة لأنه يعبر عن عناصرها بأعداد صحيحة وكسر من وحدة القياس. وليست ظاهرة حسب الزمن الإجمالي.

ر ـ ظاهرة متصلة لأنه يعبر عن عناصرها بأعداد صحيحة وكسر من وحدة القياس. وليست ظاهرة حسب المبلغ الإجمالي.

ز ـ ظاهرة نوعية قابلة للترتيب لأنه يعبر عن عناصرها بصفات تقبل الترتيب.

ل ـ ليست ظاهرة لأنه يعبّر عنها برقم واحد ولا وجود لاختلاف.

م ـ ظاهرة منفصلة لأننا نعبر عن عناصرها بأعداد صحيحة فقط.

ن ـ ظاهرة متصلة لأنه يعبر عن عناصرها بأعداد صحيحة وكسر.

ى ـ ظاهرة منفصلة لأنه يعبر عن عناصرها بأعداد صحيحة فقط.

2 ـ 1) المستوى التعليمي للعاملين بالكلية ـ ظاهرة نوعية خاضعة للترتيب.

2) أسماء مقررات السنة الأولى ـ ظاهرة نوعية غير خاضعة للترتيب.

3) عدد الكلية بكل سنة بالكلية ـ ظاهرة منفصلة.

4) أطوال طلبة سنة رابعة ـ ظاهرة متصلة.

3 ـ وحدة القياس 1 الفترة 5 ـ 10 عدد المخالفات الإدارية.

وحدة القياس 0.1 الفترة 18.5 - 20.5 عمر مجموعة من الطلبة.

وحدة القياس 0.01 الفترة 1.25 - 1.75 طول القطر لمجموعة من الأسلاك.

وحدة القياس 0.001 الفترة 10.255 - 20.755 مبالغ مجموعة من الفواتير.

4 ـ

الحدود الظاهرية	الحدود الحقيقية	وحدة القياس
11.6 - 10	11.65 - 9.95	0.1
1 - 3	0.5 - 3.5	1
1.011 - 1.2	1.0105 - 1.2005	0.001
0.031 - 0.026	0.0315 - 0.0255	0.001
0.0001 - 0.001	0.00005 - 0.00105	0.0001
(4 -) - (2 -)	(4.5 -) - (1.5 -)	1
(2.12 -) - (1.1 -)	(2.125 -) - (1.095 -)	0.01
0.621 - (1 -)	0.6215 - (1.0005 -)	0.001
(1.001 -) - 1.01	(1.0015 -) - 1.0105	0.001

5 ـ

الحدود الحقيقية	الحدود الظاهرية	وحدة القياس
0.5 - 1.5	1 - 1	ليست فترة لا وحدة قياس لها
0.225 - 0.115	0.22 - 0.12	0.01
0.015 - 0.025	0.02 - 0.02	ليست فترة لا وحدة قياس لها

0.45 - 0.65	0.5 - 0.6	0.1
(2.75 -) - (2.55 -)	(2.7 -) -(2.6 -)	0.1
(0.035 -) - (0.015 -)	(0.03 -) - (0.02 -)	0.01
0.1235 - (0.1235 -)	.123 - (0.123 -)	0.001

ملاحظة: لاحظ أن وحدة القياس للحدود الظاهرية.

6 ـ

الفترة	نوع الحدين	الحدين المخالفين	وحدة القياس
1.61 - 1.1	ظاهرين	حقيقين 1.615 - 1.095	0.01
1.05 - 1.25	ظاهرين	حقيقين 1.045 - 1.255	0.01
	كذلك هما حقيقين	ظاهرين 1.1 - 1.2	0.1
14 - 11	ظاهرين	حقيقين 14.5 - 10.5	1
0.035 - 0.012	ظاهرين	حقيقين 0.0355 - 0.0115	0.001
2.225 - 2.115	ظاهرين	حقيقين 2.2255 - 2.1145	0.001
	كذلك هما حقيقين	الظاهرين 2.22 - 2.12	0.01

7 ـ أ ـ لا رسم لها لأنها ظاهرة نوعية لا يصاحبها تكرارات.

ب ـ 1) إذا كان عدد العاملين قليلاً ترسم بالأعمدة.

2) إذا كان عدد العاملين كثيراً ترسم بالمدرج.

جـ ـ ترسم بالأعمدة المركبة.

د ـ ترسم بالأعمدة البسيطة (أو المركبة).

هـ ـ لا رسم لها لأنها ظاهرة نوعية لا يصاحبها كميات.

و ـ لا معنى لرسمها حسب الزمن الإجمالي وأعمدة حسب زمن كل صك على حدة.

ر ـ لا معنى لرسمها حسب المبلغ الإجمالي وأعمدة حسب مبلغ كل حساب.

ز ـ لا رسم لها لأنها أنواع لا يصاحبها مقدار وأعمدة حسب عدد كل مستوى.

ل ـ لا فائدة من رسمها لأنها عدد واحد.

م ـ ترسم بالمدرج.

ن ـ ترسم بالأعمدة المركبة.

ى ـ ترسم بالأعمدة إذا كان عدد البلديات قليلاً وبالمدرج إذا كان كثيراً

8 ـ أنظر البند 2 ـ 4، 2 ـ 5 (نظري)

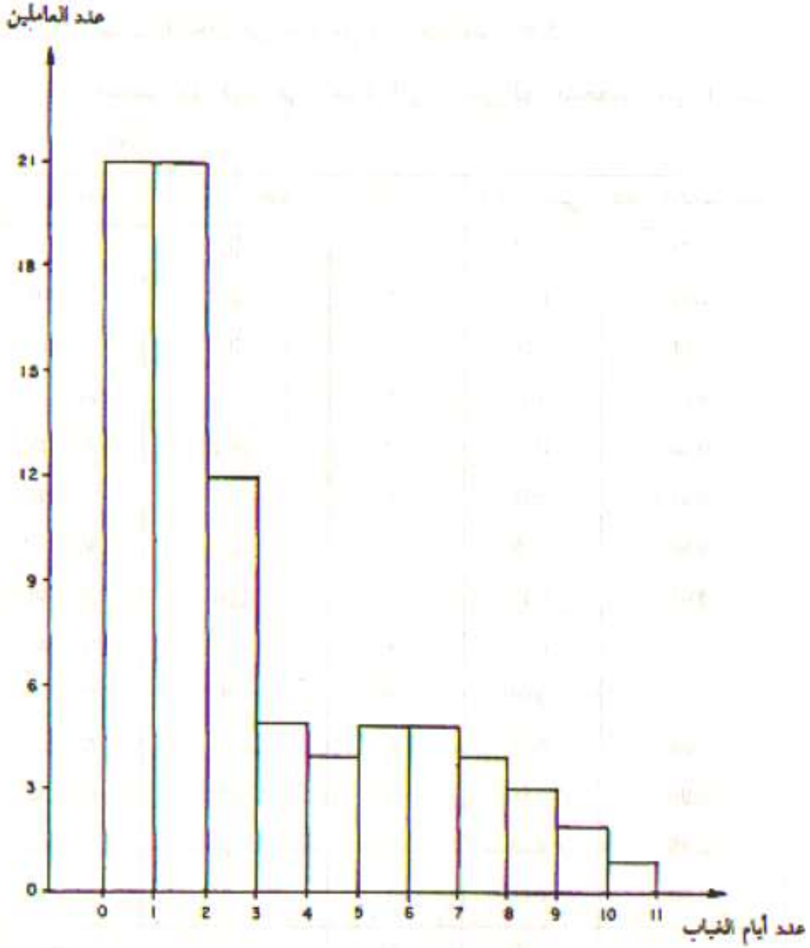
9 ـ نرسم المدرج بعد تكوين جدول التوزيع التكراري كما يلي:

1) نحدد المجال الذي توجد به المعطيات وهو 10 ـ 0 = 10

2) نقسم المجال إلى عدد من الفترات بطول = 1 ونكون الجدول كما يلي:

عدد أيام الغياب	علامات الحصر	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المتجمع النسبي
1́ – 0	‖‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖‖‖‖ I	21	0.25	0.25
2́ – 1	‖‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖‖‖‖ I	21	0.25	0.50
3́ – 2	‖‖‖‖ ‖‖‖‖ II	12	0.15	0.65
4́ – 3	‖‖‖‖	5	0.06	0.71
5́ – 4	IIII	4	0.05	0.76
6́ – 5	‖‖‖‖	5	0.06	0.82
7́ – 6	‖‖‖‖	5	0.06	0.88
8́ – 7	IIII	4	0.05	0.93
9́ – 8	III	3	0.04	0.97
10́ – 9	II	2	0.02	0.99
11́ – 10	I	1	0.01	1.00
المجموع		83	1.00	

جدول التوزيع التكراري والتكرار النسبي والتكرار المتجمع النسبي لعدد أيام غياب 83 عاملاً



من الرسم يتضح أن العدد الكثير من العاملين كان عدد أيام غيابهم قليلاً وأن العدد القليل كان عدد أيام غيابهم كثيراً.

ب ـ نكون جدول التوزيع التكراري كما يلي:

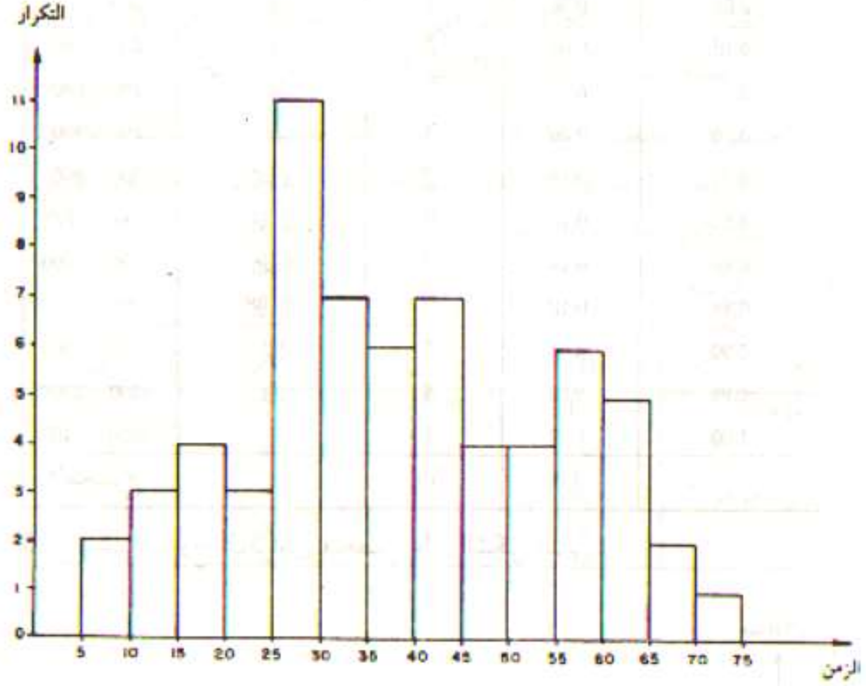
1) نحدد طول المجال = أكبر قيمة – اصغر قيمة = 70 – 6 = 64

2) نقسم المجال إلى عدد من الفترات بطول = 5

3) نحصر كل قيمة في الفترة التي تنتمي لها فنحصل على الجدول التالي:

الزمن (بالدقيقة)	علامات الحصر	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المتجمع النسبي
10 – 5	𝍷𝍷	2	0.03	0.03
15 – 10	𝍷𝍷𝍷	3	0.05	0.08
20 – 15	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	0.06	0.14
25 – 20	𝍷𝍷𝍷	3	0.05	0.19
30 – 25	𝍷 𝍸 𝍸	11	0.17	0.36
35 – 30	𝍷𝍷 𝍸	7	0.11	0.47
40 – 35	𝍷 𝍸	6	0.09	0.56
45 – 40	𝍷𝍷 𝍸	7	0.11	0.67
50 – 45	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	0.06	0.73
55 – 50	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	0.06	0.79
60 – 55	𝍷 𝍸	6	0.09	0.88
65 – 60	𝍸	5	0.08	0.96
70 – 65	𝍷𝍷	2	0.03	0.99
75 – 70	𝍷	1	0.01	1.00
المجموع		65	1.00	

4) نرسم المدرج التكراري فنحصل على الشكل التالي:



المدرج التكراري للزمن الذي تطلبه صرف 65 صكاً

يتضح من الرسم أن الصكوك التي تطلبت زمناً طويلاً جداً وكذلك التي تطلبت زمناً قصيراً عددها قليل وأن غالبية الصكوك تطلبت زمناً ليس بالقليل مما يدل على أن عملية صرف الصكوك بهذا المصرف ليست سريعة.

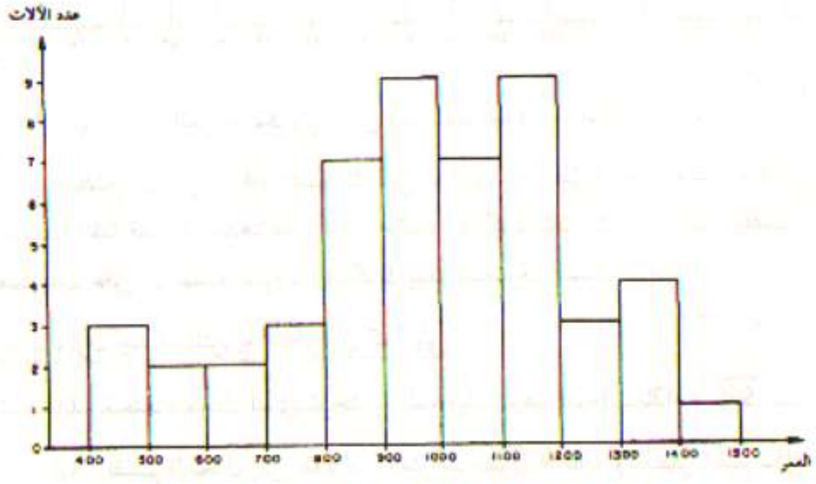
جـ ـ نكون جدول التوزيع التكراري كما يلي:

1) نحدد المجال الذي توجد به المعطيات وهو 1410 ـ 420 = 990

2) نقسم المجال إلى عدد من الفترات بطول = 100 ونحصر القيم بكل فترة فنحصل على الجدول التالي:

العمر	علامات الحصر	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المتجمع النسبي
500 – 400	ǀǀǀ	2	0.06	0.06
600 – 500	ǀǀ	2	0.04	0.10
700 – 600	ǀǀ	2	0.04	0.14
800 – 700	ǀǀǀ	3	0.06	0.20
900 – 800	ǀǀ 卌	7	0.14	0.34
1000 – 900	ǀǀǀǀ 卌	9	0.18	0.52
1100 – 1000	ǀǀ 卌	7	0.14	0.66
1200 – 1100	ǀǀǀǀ 卌	9	0.18	0.84
1300 – 1200	ǀǀǀ	3	0.06	0.90
1400 – 1300	ǀǀǀǀ	4	0.08	0.98
1500 – 1400	ǀ	1	0.02	1.00
المجموع		50	1.00	

3 ـ نرسم المدرج التكراري فنحصل على الشكل التالي:



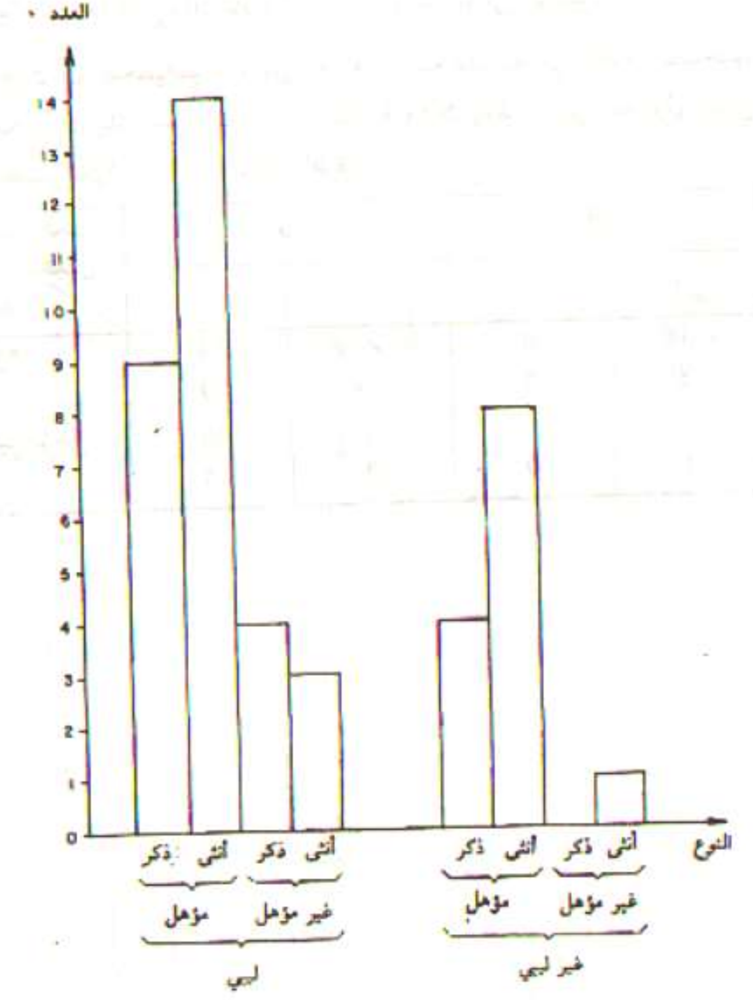
المدرج التكراري لعمر 50 آلة حاسوب

يتضح من الرسم بأن الآلات التي كان عمرها صغيراً والتي كان عمرها كبيراً جداً عددها قليل وأن غالبية الآلات كان عمرها في الوسط.

د ـ حيث أن المعطيات تدل على ظواهر نوعية مقسمة إلى صفات تصاحبها تكرارات يتم رسمها بالأعمدة البيانية وذلك بعد تكوين الجدول التالي بحصر تكرارات الصفات المتناظرة:

الجنسية / الجنس / الصفة	ليبي		غير ليبي	
	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى
مؤهل	ǀǀǀǀ 卌 9	ǀǀǀǀ 卌 卌 14	ǀǀǀǀ 4	ǀǀǀ 卌 8
غير مؤهل	ǀǀǀǀ 4	ǀǀǀ 3	0	1

الأعمدة البيانية لمجموعة من العاملين مقسمة حسب الجنس والجنسية والتأهيل



ومن الرسم يتضح بشكل عام أن عدد الليبيين أكثر من عدد غير الليبيين وعدد المؤهلين أكثر من عدد غير المؤهلين وأنه لا يوجد ذكور غير مؤهلين بهذه الأمانة.

10 ـ أ ـ عدد العاملين حسب الجنس والعمر والدخل لثلاث بلديات لسنتين.

البلدية	الدخل	السنة الأولى									السنة الثانية									المجموع
	الجنس	ذكر			المجموع	أنثى			المجموع	المجموع	ذكر			المجموع	أنثى			المجموع	المجموع	
	العمر	أقل من 25	25-45	أكثر من 45		أقل من 25	25-45	أكثر من 45			أقل من 25	25-45	أكثر من 45		أقل من 25	25-45	أكثر من 45			
1	أقل من 200																			
	350 - 200																			
	أكثر من 350																			
	المجموع																			
2	أقل من 200																			
	350 - 200																			
	أكثر من 350																			
	المجموع																			
3	أقل من 200																			
	350 - 200																			
	أكثر من 350																			
	المجموع																			
المجموع																				

ب ـ كمية وتكاليف 3 سلع تم استيرادها من 3 بلدان لثلاث سنوات

السنة	البلد	السلعة 1: الكمية	السلعة 1: التكاليف	السلعة 2: الكمية	السلعة 2: التكاليف	السلعة 3: الكمية	السلعة 3: التكاليف
1	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
المجموع							
2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
المجموع							
3	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
المجموع							
المجموع الكلي							

جـ ـ عدد طلبة الكلية حسب الفصل والتقدير

السنة / التقدير / الفصل	90/89						المجموع	91/90						المجموع
	ض ـ ج	ض	ل	جـ	جـ جـ	م		ض ـ ج	ض	ل	جـ	جـ جـ	م	
الأول														
الثاني														
الثالث														
الرابع														
الخامس														
السادس														
السابع														
الثامن														
المجموع														

تقديرات الميزانية للكلية للعام 90/ 91

د ـ أولاً: جانب المصروفات

الباب	البند	البيان	المبلغ
1	0	المهايا والمرتبات	
	1	المرتبات الأساسية	
	2	علاوة العائلة	
	3	علاوة السكن	
	4	علاوة التدريس	
	5	علاوة التمييز وطبيعة العمل	
	6	مكافآت نهاية الخدمة للمغتربين	
	7	مقابل العمل الإضافي	
	المجموع	للباب الأول	
2	0	1 ـ المصروفات التسييرية	
	1	وقود وزيوت	
	2	كهرباء	
	3	بريد	
	4	مياه	
	5	مطبوعات وقرطاسية ومواد تصوير	
	6	نفقات السفر والمبيت والمهام الرسمية	
	7	النظافة	
	8	إعلان وعلاقات عامة وضيافة	
	9	إشتراكات ومساهمات محلية ودولية	
	10	النقل	

الباب	البند	البيان	المبلغ
	11	التأمينات والضرائب والرسوم	
2		2 ـ المصروفات التشغيلية	
	12	معدات طبية	
	13	كتب ومراجع ومستلزمات المعامل	
	14	تجهيزات (مقاعد، مفروشات. . .)	
	15	قطع غيار	
	16	الصيانة	
	17	تدريب وبعثات	
	18	مصروفات النشاط العام	
		3 ـ المساعدات والمساهمات	
	19	أدوية وما في حكمها	
	20	أغذية	
	21	إلتزامات قانونية	
	22	العلاج	
	23	مصروفات خدمية	
	المجموع	للباب الثاني:	
3		الأعمال الجديدة	
المجموع			

ثانياً: جانب الإيرادات

الباب	البند	البيان	المبلغ
1		الإيرادات الذاتية	
	1	رسوم طلبة	
	2	إيرادات النشاط الجاري	
2		دعم الخزانة	
3		إيرادات أخرى	

هـ ـ جامعة ....

كلية المحاسبة: ....

كشف درجات

اسم الطالب: .... رقم الطالب: ....

تاريخ الميلاد: .... الجنسية: .... الجنس: ....

العنوان: ....

تاريخ الالتحاق بالكلية: .... تاريخ التخرج: ....

السنة الأولى: العام الجامعي: ....

ر.م	إسم المقرر	عدد الوحدات	الدرجـــة		الدرجة بالحروف	التقدير	ملاحظات
			الدور الأول	الدور الثاني			
نتيجة الطالب			التقدير:			النسبة:	

السنة الثانية: العام الجامعي: ....

نفس الجدول

السنة الثالثة العام الجامعي: ....

نفس الجدول

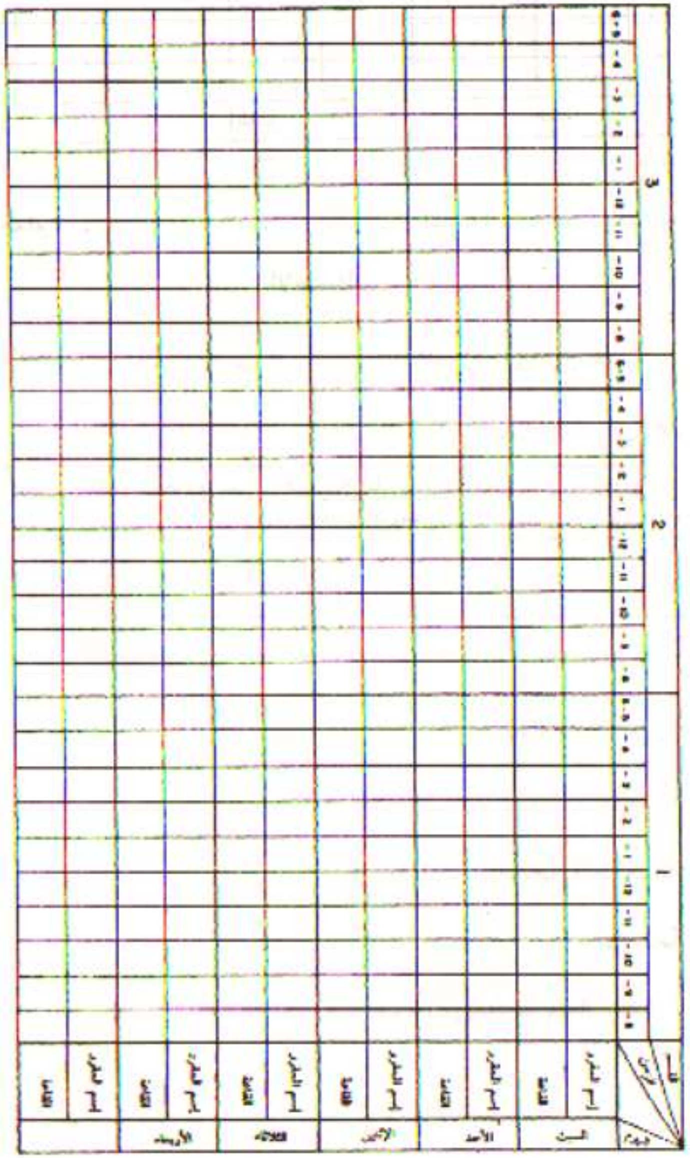
السنة الرابعة: العام الجامعي: ....

ر.م	اسم المقرر	عدد الوحدات	الدرجة		الدرجة بالحروف	التقدير	ملاحظات
			الدور الأول	الدور الثاني			
نتيجة الطالب			التقدير:			النسبة:	

التقدير العام: .... النسبة: ....

الاعتمادات

و ـ الجدول الدراسي بالكلية



11 ـ نحسب قيمة ن المجهولة من العلاقة التالية:

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{التكرار}}{\text{ن}}$$

$$\therefore 0.08 = \frac{6}{\text{ن}} \longleftarrow \text{ن} = \frac{6}{0.08} = 75$$

ثم نحسب التكرارات والتكرار النسبي المجهولة بالجدول باستخدام العلاقة السابقة. يبقى لدينا تكرار الفترة 30 ـ 40 يتم حسابه بجمع التكرارات المعلومة وطرح الناتج من 75 فنحصل على الجدول التالي:

الدرجة	0 ـ	10 ـ	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ 80
التكرار	3	9	27	0	15	6	12	3
التكرار النسبي	0.04	0.12	0.36	0	0.2	0.08	0.16	0.04

12 ـ حيث أن رسم المدرج التكراري يتطلب معرفة بداية ونهاية كل فترة عليه نحسب ذلك كما يلي: نبدأ بالفترة الأخيرة حسب المعلومة المعطاة وهي أكبر دخل هو 600؛

الفترة الأخيرة حدها الأعلى 600 ومركزها 550 يكون حدها الأدنى 500

الفترة الرابعة حدها الأعلى 500 ومركزها 460 يكون حدها الأدنى 420

الفترة الثالثة حدها الأعلى 420 ومركزها 350 يكون حدها الأدنى 280

الفترة الثانية حدها الأعلى 280 ومركزها 250 يكون حدها الأدنى 220

الفترة الأولى حدها الأعلى 220 ومركزها 200 يكون حدها الأدنى 180

ولقد حصلنا على الحد الأدنى لكل فترة من العلاقة:

الحد الأدنى = مركز الفترة ـ $\frac{1}{2}$ طول الفترة

ونصف طول الفترة هو الحد الأعلى ـ المركز

وبذلك يصبح الجدول كما يلي:

الفترة	220 ـ 180	280 ـ 220	420 ـ 280	500 ـ 420	600 ـ 500
التكرار	10	20	50	40	5

حيث أن أطوال الفترات غير متساوية، عليه نختار أحد الأطوال وليكن 100 ونحسب التكرارات المعدلة بالنسبة إلى هذا الطول من القانون:

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{طول الفترة المختارة}}{\text{طول فترة التكرار}} \times \text{التكرار}$$

∴ التكرار المعدل للفترة الأولى = $\frac{100}{40} \times 10 = 25$

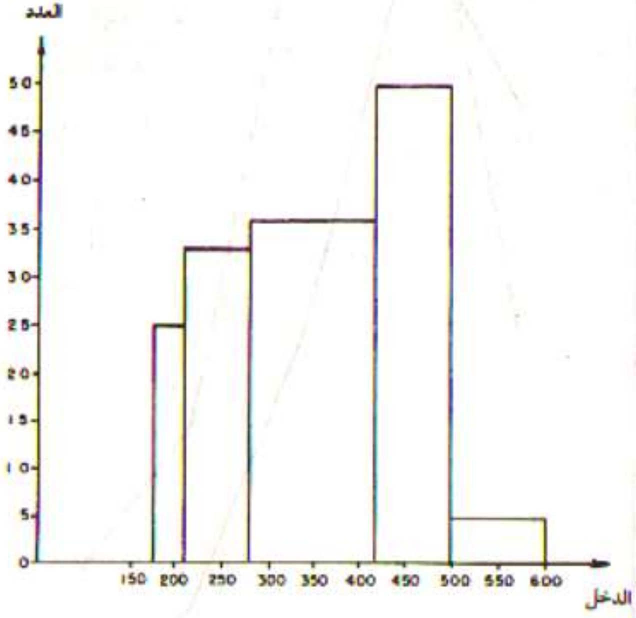
∴ التكرار المعدل للفترة الثانية = $\frac{100}{60} \times 20 = 33$

∴ التكرار المعدل للفترة الثالثة = $\frac{100}{140} \times 50 = 36$

∴ التكرار المعدل للفترة الرابعة = $\frac{100}{80} \times 40 = 50$

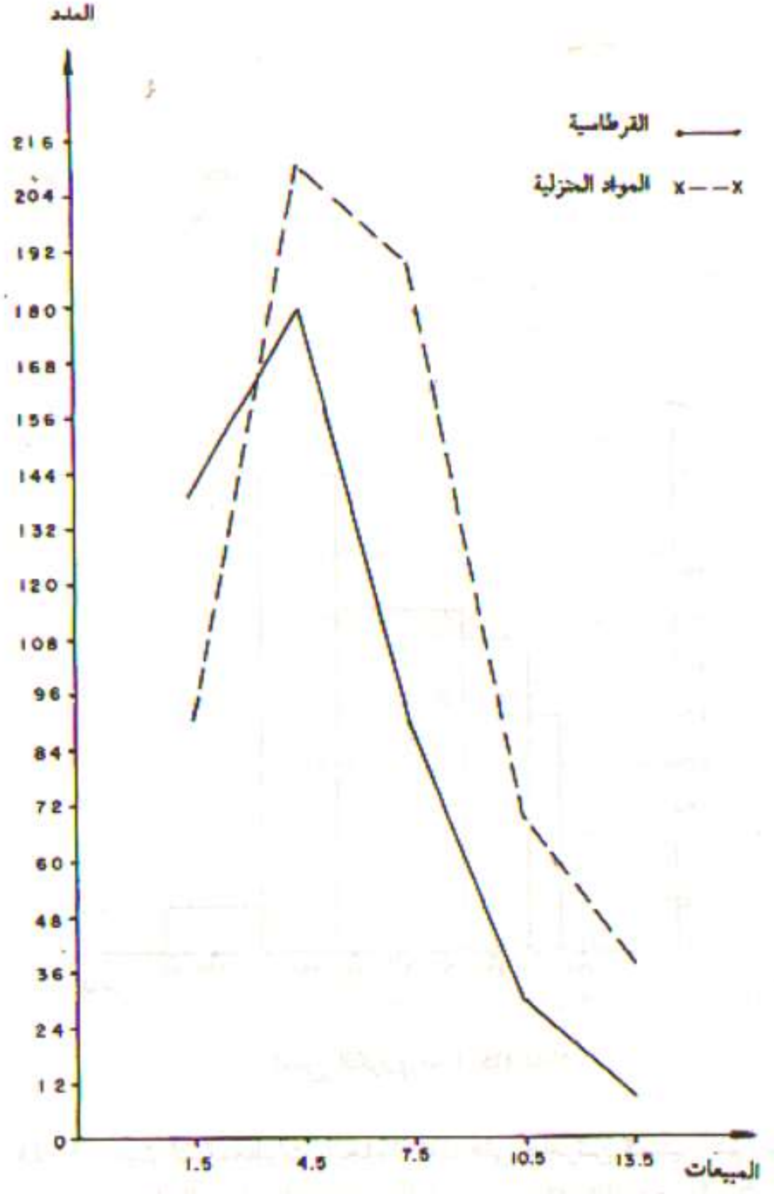
∴ التكرار المعدل للفترة الخامسة = $\frac{100}{100} \times 10 = 5$

نختار مقياس رسم مناسب على المحور الأفقي ونحدد الفترات حسب طول كل منها. وكذلك نختار مقياس رسم مناسب على المحور الرأسي للتكرارات المعدلة فنحصل على الشكل التالي:



المدرج التكراري لدخل 125 عاملاً

13 ـ أ ـ حيث أن المعطيات بالجدول تدل على ظاهرتين كميتين يتم رسمها باستخدام المضلع التكراري وذلك برسم مراكز الفترات على المحور الأفقي بمقياس رسم مناسب والتكرارات المناظرة لها على المحور الرأسي. فنحصل على الشكل التالي:



المضلع التكراري لمبيعات منشأتي القرطاسية والمواد المنزلية

ب ـ نستخدم لرسم المعطيات المضلع التكراري لأنها تدل على ظاهرتين كميتين، وحيث أن الفترات غير متساوية الأطوال عليه نحسب التكرار المعدل كما يلي:

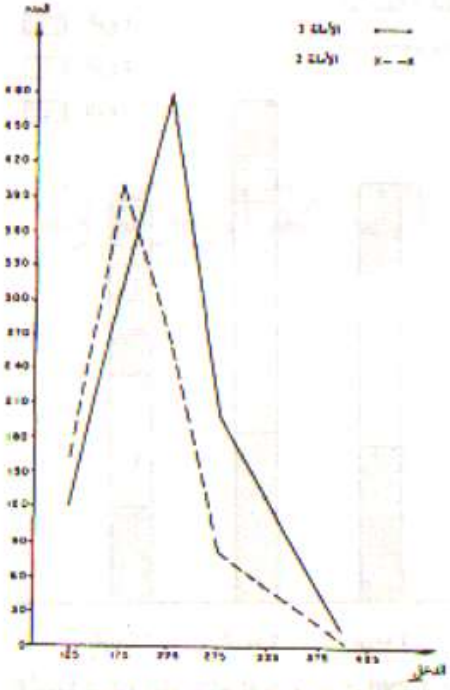
نختار طول فترة التناسب وهو 50 فيكون التكرار المعدل هو:

الأمانة (1) 120، 310، 480، 200، 15

الأمانة (2) 160، 410، 260، 80، 10

وذلك باستخدام القانون السابق وهو التكرار المعدل = $\frac{\text{طول الفترة المختارة}}{\text{طول فترة التكرار}}$ × التكرار

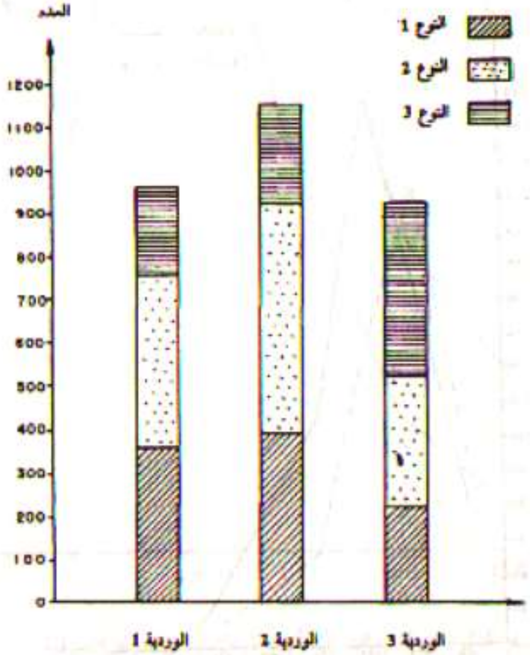
وبذلك يكون المضلع التكراري بناء على التكرارات المعدلة كما في الشكل التالي:



المضلع التكراري لدخل العاملين بأمانتين

جـ - حيث أن المعطيات نوعية مقسمة إلى صفات يصاحبها تكرارات يتم رسمها باستخدام الأعمدة المركبة كما يلي:

1 - نخصص المحور الأفقي لبيان الورديات ونقسمه إلى ثلاثة أجزاء متساوية الطول مع ترك مسافات متساوية بينها، ونحدد الكميات على المحور الرأسي وذلك بعد جمع كل نوع على حدة فيكون مجموع النوع (1) هو 960 ومجموع النوع (2) هو 1150 ومجموع نوع (3) هو 920، وبناء على ذلك يكون مقياس الرسم على المحور الرأسي لتمثيل أكبر عدد وهو 1150 ونرسم عموداً لكل وردية يكون ارتفاعه مقابلاً لمجموع الثلاثة أنواع ونقسم العمود إلى الثلاثة أجزاء حسب مقدار كل نوع فنحصل على الشكل التالي:



الأعمدة البيانية لعدد إنتاج ثلاث ورديات لثلاثة أنواع

3 ـ النزعة المركزية

3 ـ 1 مقدمة:

تعرضنا في ما سبق إلى طرق وصف البيانات باستخدام الجداول التكرارية والرسوم البيانية باختلاف أنواعها، ولكن حتى يكون الوصف أكثر فائدة دعت الحاجة إلى وجود طريقة أكثر اختصاراً من الجداول التكرارية تمكننا من الحصول على معلومات مختصرة ومفيدة عن البيانات يمكن استخدامها في المقارنة ببساطة بين الظواهر المختلفة، حيث المقارنة عن طريق الجداول لن تكون واضحة وسهلة.

ولقد وجد الإحصائيون طريقة مبنية على الحصول على قيمة واحدة تصف لنا البيانات وصفاً سليماً، وقد برزت فكرة هذه الطريقة من واقع البيانات التي حولنا حيث يلاحظ في معظم التوزيعات التكرارية للظواهر المختلفة أن عدداً هائلاً من القيم يميل إلى التجمع حول قيمة معينة في الوسط، أي في مركز التوزيع، ويقل هذا التجمع تدريجياً كلما بعدنا عن هذه القيمة. هذه الظاهرة سميت بظاهرة النزعة المركزية أي نزعة القيم المختلفة للتجمع حول مركز التوزيع وسميت القيمة التي تنزع إليها معظم القيم بالوسط، وبمعرفتنا لقيمة هذا الوسط الذي تتجمع حوله البيانات يمكننا استخدامه في وصف البيانات حيث توضح وتعطي فكرة عن كيفية توزيع القيم إما ناحية القيم الكبرى أو القيم الصغرى أو المعتدلة نسبة لبقية القيم، ولقد سميت هذه الأوساط بمقاييس النزعة المركزية وأهمها المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، المتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي. وقبل

التعرض لدراسة هذه الأوساط من حيث المفهوم وطريقة الحساب، نبدأ بعرض بعض العمليات الحسابية التي يتم استخدامها في هذا الفصل وبعض الفصول التالية له:

1 ـ التقريب:

في معظم العمليات الحسابية نلجأ إلى تقريب الأعداد إلى درجة مناسبة لأسباب؛ منها عدم الحاجة إلى درجة عالية من الدقة، أو الكفاءة المحدودة لوسيلة الحساب مثل الآلة الحاسبة.

وهناك قواعد متفق عليها في التقريب سبق وأن ذكر معظمها في الفصول السابقة.

2 ـ علامة الجمع:

فإذا كانت س$_1$، س$_2$، س$_3$، ... س$_ن$. تمثل مجموعة من القيم عددها (ن).

فإن مجموع هذه القيم هو:

س$_1$ + س$_2$ + ... + س$_ن$ وللاختصار يكتب

مجـ$_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ أو مجـ س وتستخدم العلامة مجـ للدلالة على جمع القيم المختلفة للمتغير، ويمكن استخدام هذه العلامة لتبسيط كتابة كثير من العمليات الحسابية مثل:

أ ـ إذا كانت س، ص، ع ثلاثة متغيرات، فإن مجموع ن من الحدود من هذه المتغيرات:

(س$_1$ + ص$_1$ + ع$_1$) + (س$_2$ + ص$_2$ + ع$_2$) + ...

+ (س$_ن$ + ص$_ن$ + ع$_ن$)

= (س$_1$ + س$_2$ + ... س$_ن$) + (ص$_1$ + ص$_2$ + ... + ص$_ن$)

+ (ع$_1$ + ع$_2$ + ... + ع$_ن$)

= مجـ$_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ + مجـ$_{ر=1}^{ن}$ ص$_ر$ + مجـ$_{ر=1}^{ن}$ ع$_ر$

= مجـ س + مجـ ص + مجـ ع = مجـ (س + ص + ع)

ب ـ مجموع حاصل ضرب القيم المتناظرة للمتغيرات الثلاث س، ص، ع أي:

س$_1$ × ص$_1$ × ع$_1$ + س$_2$ ص$_2$ ع$_2$ + ... + س$_ن$ × ص$_ن$ × ع$_ن$

= مجـ$_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ ص$_ر$ ع$_ر$ = مجـ س ص ع

جـ ـ مجموع ن مرة للثابت أ يساوي أ × ن أي:

أ + أ + أ + ... + أ × ن مرة

= مجـ$_{ر=1}^{ن}$ أ = ن أ

د ـ مجموع حاصل ضرب أي ثابت أ في ن حداً من المتغير س$_ر$ يساوي الثابت أ مضروباً في مجموع حدود هذا المتغير أي:

أ س$_1$ + أ س$_2$ + أس$_3$ + ... + أ س$_ن$ = أ مجـ$_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$

= أ مجـ س

هـ ـ إذا كانت أ، ب، جـ ثوابت وكانت س، ص، ع متغيرات فإن:

مجـ$_{ر=1}^{ن}$ (أ س$_ر$ + ب ص$_ر$ + جـ ع$_ر$)

= أ مجـ س + ب مجـ ص + جـ مجـ ع

و ـ كذلك

إذا كانت س_1^2، س_2^2، .... $\text{س}_{\text{ن}}^2$

هي مربعات المتغير س فإن مجموع هذه المربعات هو:

$$\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2 + \dots\dots + \text{س}_{\text{ن}}^2 = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\ \text{س}_{\text{ر}}^2$$

$$= \text{مجـ س}^2$$

3 ـ 2 المتوسط الحسابي:

وهو أكثر المقاييس الإحصائية استخداماً لسهولته وفائدته التي تضفي عليه أهمية كبرى لكثرة استعماله في القوانين والنظريات الإحصائية، ويمكن الحصول عليه بقسمة مجموع القيم للمتغير على عدد القيم لهذا المتغير.

فإذا كانت القيم س_1، س_2، .... $\text{س}_{\text{ن}}$ التي عددها يساوي ن للمتغير س فإن المتوسط الحسابي والذي نرمز له بالرمز $\bar{\text{س}}$ لهذه القيم هو:

$$\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} \quad \text{أي:}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \dots\dots + \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{مجـ س}$$

وإذا أردنا توضيح المدى الذي يأخذه المتغير س نستخدم الصورة:

$$\bar{\text{س}} = \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\ \frac{\text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{مجـ}_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\ \text{س}_{\text{ر}}$$

ويتم حساب المتوسط تبعاً لطريقة عرض البيانات.

أ ـ إذا كانت البيانات مفردة:

فمثلاً إذا كانت درجات 5 طلاب في أحد الاختبارات لمادة الإحصاء والمصححة من 30 هي 14، 25، 15، 16، 20، فإن المتوسط الحسابي لهذه الدرجات هو:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجموع الدرجات}}{\text{عدد الطلاب}} \quad \text{أي}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{20+15+16+25+14}{5} = \frac{90}{5} = 18 \ \text{درجة}$$

ب ـ إذا كانت البيانات بها تكرارات:

فإنه تستخدم الصيغة:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

حيث مجـ ك = ن (عدد المفردات).

مثال (1): أوجد المتوسط الحسابي للبيانات المعطاة بالجدول التالي:

القيمة س	2	3	4	7	8
التكرار ك	1	2	2	12	3

الحل

$$\because \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\bar{س} = \frac{8 \times 3 + 7 \times 12 + 4 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 1}{3 + 12 + 2 + 2 + 1}$$

$$\bar{س} = \frac{24+84+8+6+2}{20} = \frac{124}{20} = 6.25$$

جـ ـ إذا كانت البيانات مبوبة بفترات لحساب المتوسط الحسابي من توزيع تكراري ذات فترات مقفلة تستخدم نفس الصيغة السابقة:

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر س_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$ حيث $س_ر$ مركز الفترة ر

وذلك بفرض أن التكرارات موزعة بانتظام داخل كل فترة.

مثال (2): الجدول التالي يبين عدد الساعات الأسبوعية التي يستغلها المنتجون في أحد المصانع:

عدد الساعات (س)	20 ـ	24 ـ	28 ـ	32 ـ	36 ـ 40
عدد المنتجين (ك)	5	10	15	12	8

والمطلوب: إيجاد المتوسط الحسابي لهذا التوزيع.

الحل

في هذا المثال نعتبر مراكز الفترات تمثل قيم المتغير س التي يراد إيجاد متوسطها الحسابي والخطوات موضحة بالجدول التالي:

الفترات	التكرار (ك)	مركز الفترة (س)	حاصل ضرب (ك × س)
20 ـ	5	22	110
24 ـ	10	26	260
28 ـ	15	30	450
32 ـ	12	34	408
36 ـ 40	8	38	304
المجموع	50	150	1532

$$\because \bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{1532}{50} = 30.46$$ ساعة

د ـ إيجاد المتوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (طريقة الإنحرافات)، وتتلخص هذه الطريقة في اختيار وسطٍ فرضي وحساب انحرافات القيم عن هذا الوسط الفرضي؛ فإذا كان مجموع هذه الانحرافات مساوياً للصفر كان الوسط الفرضي مساوياً للمتوسط الحسابي، وإذا كان مجموع الانحرافات سالباً كان المتوسط الفرضي أكبر من المتوسط الحسابي، وإذا كان مجموع الانحرافات موجباً كان الوسط الفرضي أصغر من المتوسط الحسابي. ونحصل على المتوسط الحسابي بإضافة مجموع انحرافات القيم بعد قسمتها على عددها إلى الوسط الفرضي أي أن:

$$\bar{س} = و + \frac{مجـ (ح \times ك)}{مجـ ك}$$

حيث (و) هو الوسط الفرضي، ح تمثل انحرافات القيم أو مراكز الفترات عن الوسط الفرضي المختار من بين القيم أو مراكز الفترات.

ملاحظة: يراعى عند اختيار الوسط الفرضي أن يكون في وسط الجدول ومقابلاً لأكبر تكرار إن أمكن.

مثال (3): أوجد المتوسط الحسابي للجدول التكراري السابق بطريقة الوسط الفرضي.

الفترات	التكرار (ك)	مركز الفترة (س)	الانحرافات (ح)	حاصل ضرب ح × ك
20 ـ	5	22	ـ 8	ـ 40
24 ـ	10	26	ـ 4	ـ 40
28 ـ	15	30	--	00
32 ـ	12	34	4	48
36 ـ 40	8	38	8	64
المجموع	50	150	مجـ ح = 0	مجـ ح × ك = 32

$$\bar{س} = و + \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}$$

$\therefore \bar{س} = 30 + \frac{32}{50}$

$\therefore \bar{س} = 30 + 0.64 = 30.64$ ساعة.

ملاحظة: أخذنا الوسط الفرضي (و) = 30

هـ ـ إيجاد المتوسط الحسابي بطريقة الإنحرافات المختصرة (وتستخدم هذه الطريقة في حالة الجداول المنتظمة ذات الفترات متساوية الطول) فقط لتبسيط العمليات الحسابية وذلك بقسمة كل من الانحرافات (ح) على طول الفترة (ل) فنحصل على الانحرافات المختصرة $حَ = \frac{ح}{ل}$ ومن ثم يمكن إيجاد المتوسط الحسابي من الصيغة التالية:

$$\bar{س} = و + \left[\left(\frac{مجـ حَ \times ك}{مجـ ك} \right) \times ل \right]$$

والميزة في هذه الطريقة أنها تسهل العمليات الحسابية عندما تكون البيانات كبيرة القيمة وتكشف الأخطاء في حساب الإنحرافات إن وجدت.

ويمكن إيجاد المتوسط الحسابي للجدول التكراري في المثال السابق بهذه الطريقة كما يلي:

الفترات	التكرار (ك)	مركز الفترة (س)	الانحرافات (ح)	الانحرافات المختصرة (حَ)	حاصل ضرب حَ × ك
20 ـ	5	22	ـ 8	ـ 2	ـ 10
24 ـ	10	26	ـ 4	ـ 1	ـ 10
28 ـ	15	30	--	0	0
32 ـ	12	34	4	1	12
36 ـ 40	8	38	8	2	16
المجموع	50	150	مجـ ح = 0	مجـ حَ = 0	مجـ حَ × ك = 8

$$\bar{س} = و + \left[\left(\frac{مجـ حَ \times ك}{مجـ ك} \right) \times ل \right]$$

$\therefore \bar{س} = 30 + \left[4 \times \frac{8}{50} \right]$

$\bar{س} = 30 + \frac{32}{50} = 30 + 0.64$

$\therefore \bar{\text{س}} = 30.64$ ساعة.

و ـ المتوسط الوزني (المتوسط الموزون)

في بعض الحالات تكون لدينا قيم تصاحبها أعداد لا نستطيع اعتبارها تكرارات ولكن يمكن اعتبارها أهمية أو أوزاناً لهذه القيم، وقد سمي متوسطها في هذه الحالة بالمتوسط الوزني أو المتوسط الموزون؛ فمثلاً إذا كانت درجات أحد الطلبة في بعض المقررات كالآتي:

الدرجة	52	60	72	80
عدد وحدات المقرر	4	2	1	5

فما هو متوسط درجات هذا الطالب في هذه المقررات. من الملاحظ أن كل درجة يصاحبها عدد لا نستطيع اعتباره تكراراً لها ولكن هو في الواقع أهمية أي وزن لدرجة هذا المقرر، وعليه يمكن حساب متوسط درجات هذا الطالب كما يلي:

$$\bar{\text{س}} = \frac{80 \times 5 + 72 \times 1 + 60 \times 2 + 52 \times 4}{5 + 1 + 2 + 4} = \frac{800}{12} = 66.67$$

ومثل هذا المتوسط يطلق عليه إسم المتوسط الموزون، ومن ذلك يعرف المتوسط الموزون للقيم س_1، س_2، ....، $\text{س}_\text{ن}$ بأوزان و_1، و_2، ....، $\text{و}_\text{ن}$ بأنه:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{و}_\text{ر} \, \text{س}_\text{ر}}{\sum_{\text{ر}}^{\text{ن}} \text{و}_\text{ر}}$$

ومن الواضح أنه إذا كانت الأوزان متساوية فإن المتوسط الموزون يصبح هو المتوسط الحسابي العادي. كذلك يمكن استخدام هذه المعادلة في حساب المتوسط العام لمجموعتين أو أكثر إذا علم متوسط وعدد كل مجموعة.

فمثلاً إذا كان متوسط مجموعة من الدرجات مساوياً (5) وكان متوسط مجموعة أخرى من الدرجات مساوياً (7) فقد يتبادر إلى الذهن أن متوسط المجموعتين هو: $\frac{7+5}{2} = 6$ درجات.

وهذه النتيجة لا تكون صحيحة إلاّ في حالة واحدة فقط وهي عندما يكون عدد درجات المجموعة الأولى مساوياً لعدد درجات المجموعة الثانية. ولكي نتأكد من ذلك نضرب المثال الآتي:

مثال 4: لتكن المجموعة الأولى هي 3، 6، 6 فيكون متوسطها هو

$$= \frac{6+6+3}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ درجات}$$

والمجموعة الثانية هي 4، 7، 8، 9 فيكون متوسطها هو:

$$= \frac{9+8+7+4}{4} = \frac{28}{4} = 7 \text{ درجات}$$

ولكن المتوسط العام للمجموعتين هو:

$$\frac{9+8+7+4+6+6+3}{4+3} = \frac{43}{7} = 6.14 \text{ درجة}$$

والاختلاف بين هذا المتوسط والمتوسط الذي حسبناه من قبل نتج عن اختلاف عدد درجات المجموعتين، ولإيجاد المتوسط العام أو المتوسط الموزون لمجموعتين من القيم نستخدم القانون التالي:

$$\text{المتوسط الموزون} = \frac{\text{مجموع قيم المجموعة الأولى + مجموع قيم المجموعة الثانية}}{\text{عدد قيم المجموعة الأولى + عدد قيم المجموعة الثانية}}$$

وبما أن:

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} \quad \text{أو مجموع القيم = المتوسط × عدد القيم}$$

$$\therefore \text{المتوسط الموزون} = \frac{\text{متوسط المجموعة الأولى × عددها + متوسط المجموعة الثانية × عددها}}{\text{عدد المجموعة الأولى + عدد المجموعة الثانية}}$$

أي أن المتوسط الموزون = $\frac{\bar{س}_1 \times ن_1 + \bar{س}_2 \times ن_2}{ن_1 + ن_2}$ = المتوسط العام

حيث $\bar{س}_1$ = متوسط المجموعة الأولى

$ن_1$ = عدد قيم المجموعة الأولى

$\bar{س}_2$ = متوسط المجموعة الثانية

$ن_2$ = عدد قيم المجموعة الثانية

ملاحظة: هذه الطريقة ليست قاصرة على إيجاد متوسط مجموعتين بل يمكن أن تمتد لتشمل إيجاد متوسط أي عدد من المجموعات.

فمثلاً إذا كانت لدينا المجموعات الثلاث التالية:

المجموعة الأولى $\bar{س}_1 = 6$، $ن_1 = 4$

المجموعة الثانية $\bar{س}_2 = 10$، $ن_2 = 5$

المجموعة الثالثة $\bar{س}_3 = 20$، $ن_3 = 8$

فإن المتوسط الموزون لهذه المجموعات هو:

$$\text{المتوسط الموزون} = \frac{8\times20+5\times10+4\times6}{8+5+4}$$

$$= \frac{160+50+24}{17}$$

$$= \frac{234}{17}$$

$$= 13.76$$

3 ـ 2 ـ 1 خواص المتوسط الحسابي:

1 ـ سهولة حسابه وخضوعه التام للعمليات الجبرية أي يعمل على التوازن بين القيم التي أصغر منه والقيم التي أكبر منه.

2 ـ مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفراً ويمكن إثبات ذلك جبرياً كما يلي:

مجـ (س − $\bar{س}$) = صفر

الطرف الأيمن مجـ (س ـ $\bar{س}$) = مجـ س ـ ن $\bar{س}$

لكن $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$

∴ الطرف الأيمن = مجـ س ـ ن $\frac{مجـ س}{ن}$ = مجـ س ـ مجـ س = صفر يساوي الطرف الأيسر.

3 ـ مجموع مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يكون أقل ما يمكن (نهاية صغرى).

أي أن مجـ $(س ـ أ)^2$ يكون أقل ما يمكن عندما أ = $\bar{س}$ وذلك لأنه بإجراء عملية تفاضل لهذا المقدار بالنسبة إلى أ ومساواة الناتج بالصفر نجد أن:

∴ 2 مجـ (س ـ أ) = 0   ∴ مجـ س ـ ن أ = 0

∴ مجـ س = ن أ ⟸ $\bar{س}$ = أ

أي أن المقدار يكون أقل ما يمكن عندما $\bar{س}$ = أ وذلك لأن المشتقة الثانية تكون موجبة دائماً.

4 ـ يتأثر بالقيم المتطرفة بالكبر أو بالصغر ولذلك يفضل الإعتماد على مقياس آخر من مقاييس النزعة المركزية.

5 ـ لا يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة من طرف واحد أو المفتوحة من الطرفين.

6 ـ لا يمكن إيجاده بالطرق البيانية.

3 ـ 3 الوسيط

لقد اتضح لنا مما سبق أن المتوسط الحسابي يصف الوصف السليم ويعطي فكرة عامة قريبة جداً من الواقع عن البيانات المتجانسة فقط. أما إذا كانت البيانات غير متجانسة وتوجد بها قيم متطرفة ففي الواقع استخدام

المتوسط الحسابي لوصفها لا يعطي الفكرة السليمة ويكون مؤشراً غير صحيح عن البيانات وكيفية تجمعها، فمثلاً إذا كانت درجات أحد الطلاب في 5 اختبارات لأحد المقررات هي كالآتي:

36، 96، 40، 42، 41 فإذا أردنا وصف هذه الدرجات أي وصف مستوى الطالب في هذا المقرر اعتماداً على المتوسط الحسابي وهو (51)، نفهم من هذا المتوسط أن مستوى الطالب مرضٍ (أي ناجح) في هذا المقرر، ولكن إذا تمعنا في درجاته نجد أنه في الواقع راسب في 4 اختبارات وناجح في اختبار واحد فقط.

واضح أن هذا الوضع لا يمكن ومن غير المنطقي أن نصفه بأنه وضع مرضٍ، كذلك المتوسط الحسابي الذي من مفهوم النزعة المركزية تنزع إليه غالبية القيم نجد أن قيمته خارج تجمع الغالبية حيث أن قيمته أكبر من 4 قيم.

لذلك فإن استخدام المتوسط الحسابي في وصف مثل هذه البيانات غير واقعي لذا دعت الحاجة إلى وجود مقياس آخر يكون أكثر واقعية لوصف مثل هذه المواقف أي في حالة وجود قيم متطرفة ،هذا المقياس يسمى بالوسيط.

ويعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تقسم المجموعة إلى قسمين بحيث يكون عدد المفردات الأقل منها في القيمة مساوياً لعدد المفردات الأكبر منها في القيمة.

ويعتمد إيجاد الوسيط اعتماداً كبيراً على عدد القيم من حيث كونه فردياً أو زوجياً ولهذا تختلف طريقة إيجاده تبعاً لاختلاف هذا العدد. وسوف نتعرض لكيفية حسابه تبعاً لطريقة عرض البيانات.

1 ـ إيجاد الوسيط في حالة البيانات المفردة

أ ـ عندما يكون عدد القيم فردياً:

نقوم بترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً فيكون الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن+1}{2}$ حيث ن تمثل عدد القيم.

فمثلاً في المثال السابق الذي يوضح درجات 5 اختبارات لأحد الطلاب والتي كانت كالتالي:

36، 96، 42، 40، 41

فيمكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً كما يلي:

36، 40، 41، 42، 96 أو 96، 42، 41، 40، 36

فيكون الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

أي أن قيمة الوسيط هي 41 وهي القيمة الثالثة في الترتيب ومن الواضح أن هذه القيمة تبين مستوى الطالب في هذا المقرر بأكثر واقعية من المتوسط الحسابي.

ب ـ عندما يكون عدد القيم زوجياً:

إذا كان عدد القيم زوجياً فإن هناك قيمتين في المنتصف ترتيبهما $\frac{ن}{2}$، $\frac{ن}{2}+1$ ويكون الوسيط في هذه الحالة في منتصف المسافة بينهما، أي هو المتوسط الحسابي لهاتين القيمتين. فمثلاً إذا كانت لدينا القيم:

20، 15، 10، 30، 35، 38 ورتبناها تصاعدياً فإنها تصبح:

10، 15، 20، 30، 35، 38

ويكون الوسيط مساوياً لـ $\frac{30+20}{2} = \frac{50}{2} = 25$

وإذا رتبناها تنازلياً فإنها تصبح 38، 35، 30، 20، 15، 10 ويكون الوسيط مساوياً لـ $\frac{20+30}{2} = 25$

جـ ـ إيجاد الوسيط في حالة البيانات المبوبة:

لإيجاد الوسيط للبيانات المبوبة في شكل جداول تكرارية ذات فترات نوجد أولاً:

ترتيب الوسيط والذي = $\frac{ن}{2}$ أو $\frac{مجـ ك}{2}$

سواء كان التكرار الكلي فردياً أو زوجياً، ثم نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد (أو النازل)، وباستخدام ترتيب الوسيط نحدد الفترة التي يقع بها الوسيط (من جدول التكرار المتجمع) وتسمى هذه الفترة بالفترة الوسيطية ثم نحسب الوسيط باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفترة الوسيطية} + \frac{\left(\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{جـ}\right) \times \text{ل}}{\text{تكرار الفترة الوسيطية}}$$

حيث جـ = التكرار المجتمع الصاعد السابق لفترة الوسيط

تكرار الفترة الوسيطية = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لفترة الوسيط - التكرار المتجمع السابق لفترة الوسيط أو باستخدام الرموز:

$$\text{الوسيط} = \text{ح}_\text{د} + \frac{\text{ف}}{\text{ك}} \times \text{ل} \quad \text{حيث}$$

$\text{ح}_\text{د}$ = الحد الأدنى لفترة الوسيط.

، ف = الفرق بين ترتيب الوسيط والتكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الوسيط.

، ك = تكرار الفترة الوسيطية.

، ل = طول الفترة الوسيطية.

ويمكن توضيح هذه الطريقة بإيجاد الوسيط للبيانات الموجودة بالجدول التكراري التالي:

الفترات	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 - 90
عدد الطلاب	4	8	13	20	40	30	5

ويتم ذلك بإيجاد ترتيب الوسيط الذي يساوي في هذه الحالة

$$\frac{\text{مجـ ك}}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

ثم تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد.

الحدود العليا للفترات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 20	0
أقل من 30	4
أقل من 40	12
أقل من 50	25
أقل من 60	45
أقل من 70	85
أقل من 80	115
أقل من 90	120

الفترة الوسيطية هي (60 - 70)

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الوسيط = 45

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لفترة الوسيط = 85

وبفرض أن المفردات موزعة بانتظام داخل الفترة الوسيطية فيكون الوسيط مساوياً لـ:

$$\text{الوسيط} = \text{ح}_\text{د} + \left(\frac{\text{ف}}{\text{ك}} \times \text{ل}\right)$$

$$= 60 + \left(\frac{60 - 45}{85 - 45}\right) \times 10$$

$$= 60 + 3.75$$

= 63.75 درجة.

كذلك يمكن إيجاد الوسيط لهذا المثال باستعمال جدول التكرار المتجمع النازل كما يلي:

الحدود الدنيا للفترات	التكرار المتجمع النازل
أكبر من 20	120
أكبر من 30	116
أكبر من 40	108
أكبر من 50	95
أكبر من 60	75
أكبر من 70	35
أكبر من 80	5
أكبر من 90	0

يمكن اتباع نفس الخطوات السابقة التي اتبعت عند استخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد إلا أن الصيغة المستخدمة هنا تكون:

$$\text{الوسيط} = ح_1 - \left(\frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \bar{ح}}{ك}\right) \times ل$$

حيث $ح_1$ تعني في هذه الحالة الحد الأعلى لفترة الوسيط، $\bar{ح}$ تعني التكرار المتجمع النازل اللاحق لفترة الوسيط، ك تعني تكرار فترة الوسيط، ل طولها.

$$\text{الوسيط} = 70 - \left(\frac{60 - 35}{40}\right) \times 10$$

$$\text{الوسيط} = 70 - \frac{25}{4}$$

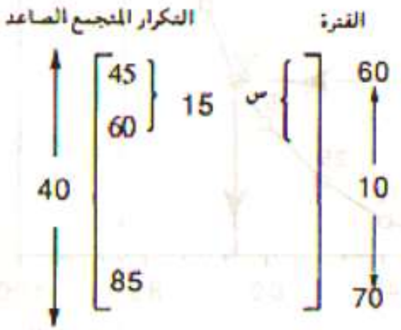
∴ الوسيط = 70 - 6.25 = 63.75 درجة

وهي نفس النتيجة السابقة.

د ـ طريقة أخرى لإيجاد الوسيط:

وأساس هذه الطريقة فكرة النسبة والتناسب وتتمثل في تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد ووضع قوسين أحدهما مبين عليه الفترة الوسيطية والآخر مبين عليه التكرار المتجمع الصاعد المناظر . وفي حالة المثال السابق نجد أن طول

الفترة الوسيطية يساوي (10) وتكرارها (40) وبحساب بُعْد ترتيب الوسيط (60) عن التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الوسيط (45) نجده 60 ـ 45 = 15 وهذا البعد يناظر بعد الوسيط عن الحد الأدنى لفترة الوسيط والذي نرمز له بالرمز س أي أن الوسيط = 60 + س حيث س، يمكن الحصول عليها من العلاقة التالية :



$$\frac{س}{10} = \frac{15}{40}$$

∴ $س = \frac{15}{4}$

∴ س = 3.75

∵ الوسيط = 60 + س

∴ الوسيط = 60 + 3.75

= 63.75 درجة

هـ ـ إيجاد الوسيط بيانياً:

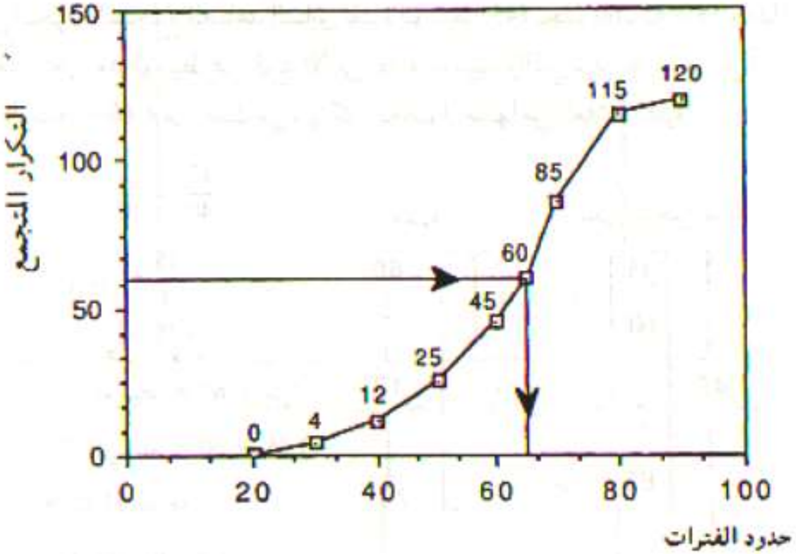
لإيجاد الوسيط بيانياً نرسم محورين متعامدين أحدهما نمثل عليه التكرار المتجمع وهو المحور الرأسي وعلى المحور الآخر أو الأفقي نمثل عليه حدود الفترات، ثم نرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل ونعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ثم نرسم خطاً أفقياً حتى يقابل المنحنى في نقطة، نسقط من هذه النقطة عموداً على المحور الأفقي فيقابله عند نقطة تكون هذه النقطة هي قيمة الوسيط .

وإذا رسمنا المنحنيين الصاعد والنازل في شكل واحد نجد أن المنحنيين يلتقيان في نقطة، نسقط من هذه النقطة عموداً على المحور الأفقي فيقابله في نقطة وتكون هذه النقطة هي قيمة الوسيط .

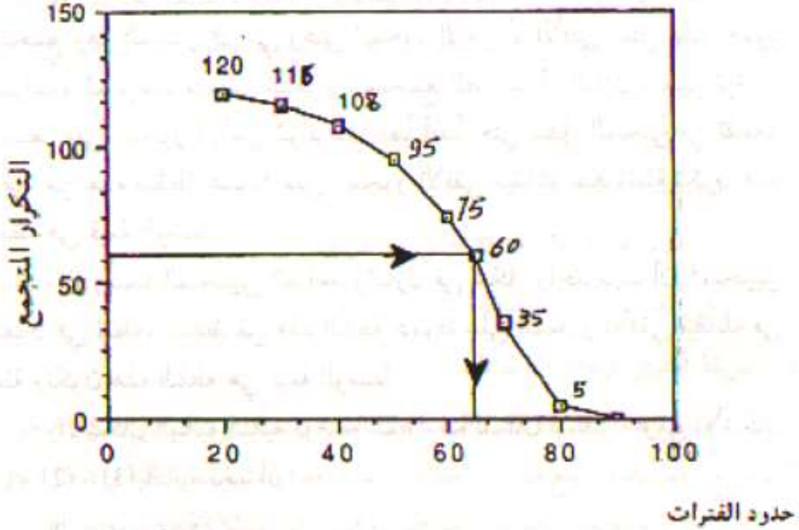
والأشكال البيانية التالية توضح المطلوب للمثال السابق، ومن الأشكال (1)، (2)، (3) التالية نجد أن:

الوسيط = 63.75 درجة تقريباً .

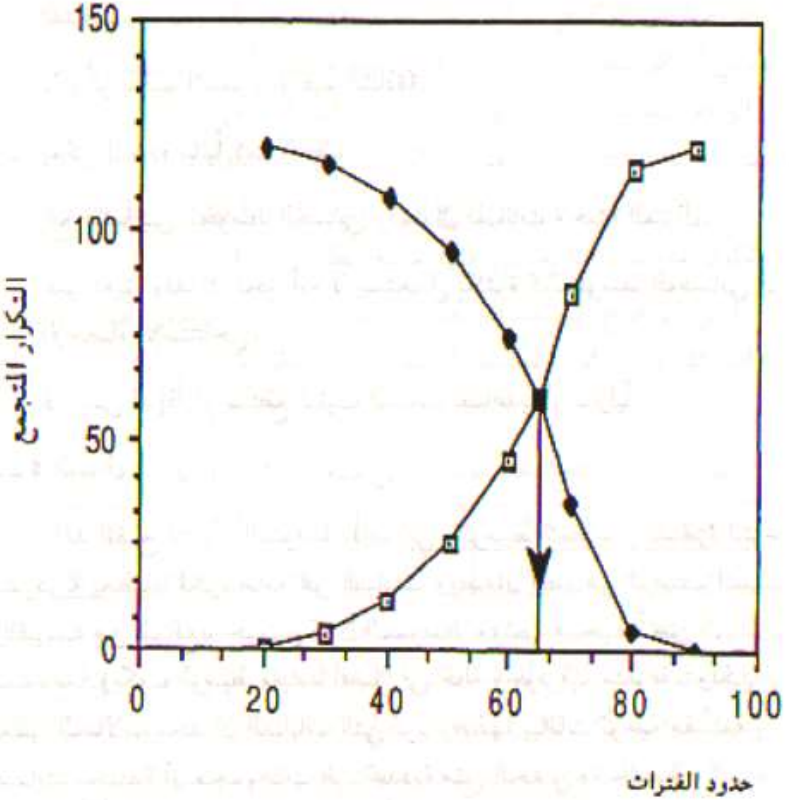
شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)



3 ـ 3 ـ 1 خواص الوسيط

1 ـ لا يتأثر الوسيط بأطوال الفترات حتى ولو كانت غير متساوية.

2 ـ يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة لأننا عند حسابه لا نحتاج إلى مراكز الفترات.

3 ـ لا يتأثر بالقيم المتطرفة (القيم الشاذة).

4 ـ يمكن إيجاده بيانياً كما لاحظنا.

5 ـ يقع دائماً بين المتوسط الحسابي والمنوال للبيانات وحيدة المنوال.

6 ـ غير دقيق ولذلك نجد أنه لا يستعمل بكثرة كالمتوسط الحسابي في الإحصاء الإستنتاجي.

7 ـ لا معنى له إذا لم نستطع ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

3 ـ 4 المنوال:

لقد اتضح لنا بأن المتوسط الحسابي والوسيط كمقاييس لظاهرة النزعة المركزية يعطيان فكرة عامة عن البيانات ويصفان الظواهر الوصف السليم والقريب من الواقع، حيث يكون المتوسط مؤشراً صحيحاً عن البيانات المتجانسة ويكون الوسيط مقياساً أفضل في حالة وجود قيم متطرفة. ولكن في بعض الحالات نجد أن البيانات التي نود وصفها بيانات نوعية مقسمة إلى صفات مختلفة أو مجموعات غير عددية مثل الجنس والجنسية، المؤهل العلمي، أنواع الإنتاج لأحد المصانع أو المشاريع الزراعية وغيرها، في مثل هذه الحالات نجد أن وصف البيانات باستخدام المتوسط أو الوسيط لن يكون له معنى فلا نستطيع جمع عناصر غير متشابهة ولا يمكننا ترتيبها، عليه دعت الحاجة أو الضرورة لإيجاد مقياس آخر يمكن استخدامه في مثل هذه الحالات، هذا المقياس سمي بالمنوال الذي يعرف بأنه القيمة (أو النوع) الأكثر

وجوداً بالبيانات أي الأكثر شيوعاً أو التي يقابلها أكثر تكراراً.

وفي الواقع نجد أن المنوال هو المقياس المقصود عند العامة عند التعبير عن المتوسط، فمثلاً عند التعبير عن متوسط الزمن الذي تستغرقه من البيت إلى الجامعة من الواضح أن المتوسط الذي نقصده هو المنوال وليس المتوسط الحسابي أو الوسيط، ونفس الشيء في عدة مواقف أخرى نستخدم المتوسط وفي الواقع المقصود هو المنوال وحيث أن المنوال. هو النوع أو القيمة التي يقابلها أكبر تكرار فقد يكون للبيانات أكثر من منوال واحد.

فمثلاً قد تكون أكثر من نوع أو حجم، أكثر ما ينتجه أحد المصانع، وقد تكون عدة درجات تحصل علها غالبية الطلبة وهكذا.

ومن الواضح أن المنوال يكون له معنى واقعي ومنطقي عندما تكون البيانات كثيرة والتكرار المقابل للمنوال كبيراً مقارنة بباقي تكرارات القيم الأخرى.

فمثلاً إذا كان إنتاج أحد المصانع من سلع مختلفة كما يلي:

النوع	أ	ب	جـ	د	هـ
المقدار	100	110	90	9800	120

فإذا أردنا وصف إنتاج هذا المصنع فإن المقياس المناسب هو المنوال لأن البيانات مقسمة إلى أنواع ويكون النوع (د) هو الذي يصف إنتاج هذا المصنع لأنه يقابله أكبر تكرار نسبة إلى بقية الأنواع الأخرى، ويبين المنوال أن غالبية إنتاج هذا المصنع هو النوع (د)، وكما ذكرنا فإن المنوال هو المقياس الوحيد للنزعة المركزية للبيانات النوعية.

ولكن يمكن استخدامه لوصف البيانات الكمية إذا كانت تتجمع بكثرة حول قيمة معينة أو في فترة معينة.

فإذا كانت البيانات مفردة وبها تكرارات يكون المنوال هو القيمة التي يقابلها أكبر تكرار.

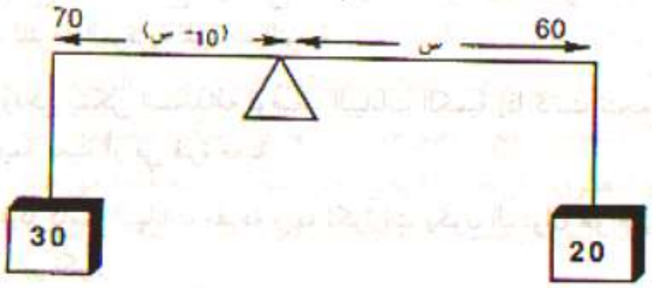
فمثلاً إذا كان إنتاج أحد المصانع يتم إعداده في صناديق مُختلفة السعة كالآتي:

عدد القطع بالصندوق	6	12	18	24
عدد الصناديق	100	3000	50	90

فإذا أردنا وصف ظاهرة إنتاج هذا المصنع، من الواضح أن المقياس المناسب لذلك هو المنوال حيث أن غالبية الإنتاج يعد في صناديق سعة 12 قطعة وعليه يكون المنوال (12) حيث يقابله أكبر تكرار (3000). أما إذا كانت البيانات مبوبة في جداول تكرارية ذات فترات فإن فكرة حساب المنوال مبنية على أن نجمع البيانات داخل الفترة التي يقابلها أكبر تكرار والتي تسمى بالفترة المنوالية يتأثر بالتجمعات المجاورة في الفترة السابقة والفترة اللاحقة للفترة المنوالية حيث يعمل كل تجمع على جذب المنوال ناحيته، وعليه يكون موقع المنوال (أي قيمة المنوال) في نقطة داخل الفترة المنوالية بحيث توازن بين تأثير التجمعين ويتم حسابه بإحدى الطرق التالية:

1 ـ طريقة الرافعة:

وهنا نعتبر أن الفترة المنوالية عبارة عن رافعة من النوع الأول حيث يمثل تكرار الفترة قبل المنوالية القوة وتكرار الفترة بعد المنوالية المقاومة وعلى هذا الأساس يتحدد موضع المنوال عند محور الإرتكاز لهذه الرافعة كما بالشكل التالي:



ولحساب المنوال للجدول التكراري الخاص بتوزيع درجات الطلبة السابق ذكره، نجد أن أكبر تكرار يقع أمام الفترة (60 ـ 70) وهي الفترة المنوالية. ولتحديد موضع المنوال داخلها أنه يبعد المسافة (س) عن بداية الفترة المنوالية وبذلك يكون بعده عن نهاية الفترة المنوالية مسافة قدرها (10 ـ س). ومن قانون الرافعة نجد أن:

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

∴ 20 × س = 30 (10 ـ س)

20 س = 300 ـ 30 س

50 س = 300 ومنها

$$س = \frac{300}{50} = 6$$

وبذلك يكون المنوال مساوياً لـ:

بداية الفترة المنوالية + س

∴ المنوال = 60 + 6 = 66 درجة.

ومن الواضح أنه لو كان تكرار الفترة قبل المنوالية مساوياً لتكرار الفترة بعد المنوالية لكان المنوال في مركز الفترة المنوالية.

2 ـ طريقة الفروق (لبيرسون)

وهذه الطريقة تعتمد على تكرار الفترتين السابقة واللاحقة للفترة المنوالية وتكرار الفترة المنوالية نفسها، وعليه يتحدد موضع المنوال بحيث يقسم الفترة المنوالية إلى قسمين بنسبة $ف_1$: $ف_2$ حيث:

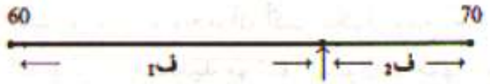
$ف_1$ هو الفرق بين تكرار الفترة المنوالية وتكرار الفترة السابقة لها.

$ف_2$ هو الفرق بين تكرار الفترة المنوالية وتكرار الفترة اللاحقة لها.

ولتطبيق هذه الطريقة على المثال السابق نجد أن:

ف$_1$ = 40 ـ 20 = 20

ف$_2$ = 40 ـ 30 = 10



والمنوال يكون عند النقطة التي تقسم الفترة المنوالية (60 ـ 70) بنسبة 20: 10 أي 2: 1 .

فإذا كان بعد المنوال عن بداية الفترة المنوالية س فإن بعده عن نهاية الفترة المنوالية هو (10 ـ س) ومن ذلك نجد أن:

س: (10 ـ س) يجب أن تقسم بنسبة 20: 10

أي أن:

$$\frac{س}{10 - س} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}$$

∴ س = 20 ـ 2 س أو 3 س = 20

ومنها س = $\frac{20}{3} = 6.67$

وبعد ذلك يمكن الحصول على المنوال باستخدام العلاقة:

$$المنوال = ح_د + \left(\frac{ف_1}{ف_1 + ف_2}\right) \times ل$$

حيث ح$_د$ هو الحد الأدنى للفترة المنوالية، ل هو طول الفترة،

$$\frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times ل = س$$

∴ المنوال = 60 + 6.67 = 66.67 درجة.

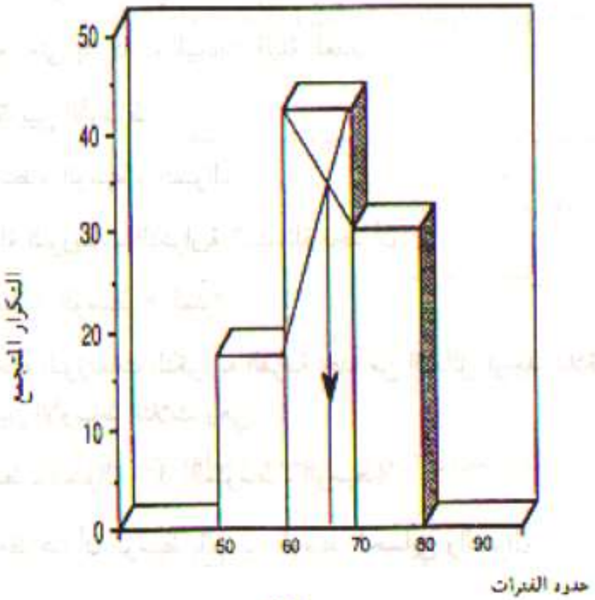
ملاحظة: نلاحظ أن الفرق بين قيمة المنوال باستخدام الطريقتين ليس كبيراً ولكن عموماً الطريقة الثانية أكثر دقة.

3 ـ الطريقة البيانية:

يمكن الحصول على المنوال بيانياً وذلك برسم الثلاثة مستطيلات من المدرج التكراري والتي تمثل الفترة المنوالية والفترتين السابقة واللاحقة لها كما بالشكل التالي، ثم توصيل الركن الأيمن العلوي للمستطيل الذي يمثل تكرار الفترة المنوالية بالركن الذي يماثله في المستطيل الذي يمثل تكرار الفترة السابقة لها. ثم توصيل الركن الأيسر العلوي للمستطيل الذي يمثل تكرار الفترة المنوالية بالركن الذي يماثله في المستطيل الذي يمثل تكرار الفترة اللاحقة لها فيتقابل المستقيمان في نقطة، نسقط من هذه النقطة عموداً على المحور الأفقي فيقابله في نقطة، هذه النقطة هي قيمة المنوال.

من الرسم نجد ان قيمة المنوال = 66.67 درجة تقريباً.

إيجـاد المنوال بيانياً



ملاحظة: عند إيجاد المنوال للبيانات المبوبة في جداول تكرارية أطوال فتراتها غير متساوية يجب إجراء تعديل التكرارات قبل إيجاد المنوال بأية طريقة من الطرق السابقة.

كذلك اختلاف أطوال الفترات يؤدي في بعض الأحيان إلى تغيير موضع المنوال، كما أن قيمة المنوال المحسوبة من التوزيع التكراري غالباً ما تختلف عن قيمته المحسوبة من القيم غير المبوبة لنفس البيانات.

3 ـ 4 ـ 1 خواص المنوال

1 ـ لا يتأثر المنوال بالقيم المتطرفة.

2 ـ يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة وكذلك عن طريق الرسم البياني.

3 ـ يعتبر المنوال المقياس الوحيد الذي يمكن استخدامه لقياس متوسط الظواهر التي لا يمكن قياسها كمياً (مثل الصفات)، حيث يمكن اعتبار الصفة الأكثر تكراراً هي منوال المجموعة.

4 ـ ليس له معنى إذا كانت البيانات قليلة العدد.

3 ـ 5 العلاقة بين الأوساط

المتوسط، الوسيط، المنوال

أ ـ في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة نجد أن:

المتوسط = الوسيط = المنوال

ب ـ وفي حالة التوزيعات التكرارية القريبة جداً من التماثل توجد علاقة تقريبية تربط بين الأوساط الثلاث وهي:

المتوسط ـ المنوال = 3 (المتوسط ـ الوسيط).

ونلاحظ هنا أن الوسيط يقع بين الوسط الحسابي والمنوال.

ويمكن استخدام العلاقة في تقدير المتوسط الحسابي من الجداول التكرارية المفتوحة وذلك بحساب كل من المتوسط والمنوال والتعويض في العلاقة السابقة.

مثال (5): التوزيع التكراري التالي يبين عدد الساعات التي يحتاجها المنتجون لإنجاز عمل معين في أحد المصانع بالجماهيرية.

عدد الساعات	6 ـ	8 ـ	10 ـ	12 ـ	14 ـ	16 ـ	18 فأكثر
عدد المنتجين	5	12	25	30	16	8	4

والمطلوب: تقدير متوسط عدد الساعات لهذا التوزيع.

الحل

حيث أن هذا التوزيع مفتوح من أعلى لذلك لا يمكن إيجاد المتوسط مباشرة لأنه لا يمكن إيجاد مركز الفترة الأخيرة ولهذا يجب تقدير المتوسط من العلاقة:

المتوسط ـ المنوال = 3 (المتوسط ـ الوسيط)

لإيجاد الوسيط نوجد:

أولاً: ترتيب الوسيط.

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مج ك}}{2} = \frac{100}{2} = 50$

ثانياً: نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:

الحدود العليا للفترات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 6	0
أقل من 8	5
أقل من 10	17
أقل من 12	42
أقل من 14	72
أقل من 16	88
أقل من 18	96
أقل من ∞	100

الفترة الوسيطية هي (12 ـ 14)

$$\text{الوسيط} = \text{ح}_{\text{د}} + \left(\frac{\frac{\text{مجـ ك}}{2} - \text{جـ}}{\text{ك}}\right) \times \text{ل}$$

$$\text{الوسيط} = 12 + \left(\frac{50 - 42}{30}\right) \times 2$$

$$= 12 + \frac{16}{30}$$

$$= 12 + 0.53$$

= 12.53 ساعة

لإيجاد المنوال نوجد الفترة المنوالية وهي في هذا المثال (12 ـ 14)،

ثم نوجد $\text{ف}_1 = 30 - 25 = 5$

، $\text{ف}_2 = 30 - 16 = 14$

ومن ذلك نجد المنوال:

$$\text{المنوال} = \text{ح}_{\text{د}} + \left(\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}\right) \times \text{ل}$$

$$= 12 + \left(\frac{5}{5 + 14}\right) \times 2$$

$$= 12 + 0.52$$

= 12.52 ساعة.

ولتقدير المتوسط نعوض في العلاقة

المتوسط ـ المنوال = 3 (المتوسط ـ الوسيط)

$$\therefore \bar{\text{س}} - 12.52 = 3(\bar{\text{س}} - 12.53)$$

$$\bar{\text{س}} - 12.52 = 3\bar{\text{س}} - 37.59$$

$$\therefore 37.59 - 12.52 = 2\bar{\text{س}}$$

$$25.07 = 2\bar{\text{س}}$$

$$\therefore \bar{\text{س}} = \frac{25.07}{2} = 12.54 \text{ ساعة}$$

جـ ـ في البيانات وحيدة المنوال يكون:

1 ـ المنوال < الوسيط < المتوسط إذا كانت القيم الصغيرة كثيرة.

2 ـ المنوال > الوسيط > المتوسط إذا كانت القيم الكبيرة كثيرة.

3 ـ 6 المتوسط الهندسي:

إذا كانت البيانات التي نود وصفها تعبر عن ظواهر نسبية أي تدل على معدل تغير ظاهرة نسبة إلى ظاهرة أخرى مثل السرعة، أو أن البيانات تدل على نسب تغير مثل نسبة النجاح، نسبة التغير في الإنتاج أو غيره، في مثل هذه الظواهر وجد إحصائياً أن استخدام الأوساط السابقة لا تصف هذه الظواهر الوصف السليم، عليه يستخدم متوسط آخر سمي بالمتوسط الهندسي الذي يعرف كما يلي:

إذا كانت س_1، س_2، س_3 ...... ، $\text{س}_{\text{ن}}$ هي قيم متغير ما فإن المتوسط الهندسي لهذه القيم ويرمز له بالرمز (هـ) هو الجذر النوني لحاصل

ضرب هذه القيم أي أن:

$$\text{المتوسط الهندسي} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1 \times \text{س}_2 \times \text{س}_3 \times \dots\dots \times \text{س}_\text{ن}}$$

ويمكن تبسيط العمليات الحسابية عند حساب هذا المتوسط باستخدام اللوغارثمات كما يلي:

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1 \times \text{س}_2 \times \text{س}_3 \times \dots\dots \times \text{س}_\text{ن}}$$

حيث هـ هو المتوسط الهندسي. ويأخذ اللوغارثم للطرفين

$$\therefore \text{لو هـ} = \frac{1}{\text{ن}} \text{لو} \; (\text{س}_1 \times \text{س}_2 \times \text{س}_3 \times \dots\dots \times \text{س}_\text{ن})$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} [\text{لو س}_1 + \text{لو س}_2 + \text{لو س}_3 \dots\dots + \text{لو س}_\text{ن}]$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{لو س}_\text{ر} = \frac{1}{\text{ن}} \text{مجـ لو س}$$

ويكون المتوسط الهندسي لهذه القيم هو العدد المقابل لـ لو هـ

ويكون لهذا المتوسط معنى إذا كانت كل القيم موجبة وليس له معنى إذا كانت إحدى القيم سالبة أو تساوي صفراً.

مثال (6): أوجد المتوسط الهندسي للأعداد أو القيم التالية التي توضح نسبة الزيادة في الإنتاج لأحد المصانع خلال 6 سنوات:

5، 8، 12، 20، 25، 30

الحل

$$\because \text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1 \times \text{س}_2 \times \dots\dots \times \text{س}_\text{ن}}$$

$$\therefore \text{هـ} = \sqrt[6]{30 \times 25 \times 20 \times 12 \times 8 \times 5}$$

$$\therefore \text{لو هـ} = \tfrac{1}{6} \text{لو} \; (30 \times 25 \times 20 \times 12 \times 8 \times 5)$$

$$\therefore \text{لو هـ} = \tfrac{1}{6} (\text{لو } 5 + \text{لو } 8 + \text{لو } 12 + \text{لو } 20 + \text{لو } 25 + \text{لو } 30)$$

$$\text{لو هـ} = \tfrac{1}{6} (0.699 + 0.903 + 1.079 + 1.30 + 1.398 + 1.477)$$

$$= 1.14$$

$$\therefore \text{هـ} = 13.8$$

3 ـ 6 ـ 1 إيجاد المتوسط الهندسي للبيانات المبوبة

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1^{\text{ك}_1} \times \text{س}_2^{\text{ك}_2} \times \dots\dots\dots \times \text{س}_\text{ن}^{\text{ك}_\text{ن}}}$$

حيث $\text{ن} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_\text{ر}$

وباستخدام اللوغارثمات يكون:

$$\text{لو هـ} = \frac{\text{مجـ ك}_\text{ر} \text{ لو س}_\text{ر}}{\text{ن}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{\text{مجـ ك لو س}}{\text{ن}}$$

ويكون المتوسط الهندسي لهذه القيم هو العدد المقابل لـ لو هـ.

مثال (7) أوجد الوسط الهندسي للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	5 ـ	25 ـ	45 ـ	65 ـ	85 ـ	105 ـ	125 ـ	145 ـ 165
التكرارات	4	6	15	22	13	7	5	3

الفترات	التكرار (ك)	مراكز الفترات	لوغارتمات مراكز الفترات	حاصل ضرب ك × لو س
5 ـ	4	15	1.176	4.704
25 ـ	6	35	1.044	9.264
45 ـ	15	55	1.740	26.106
65 ـ	22	75	1.875	41.252
85 ـ	13	95	1.978	25.710
105 ـ	7	115	2.061	14.424
125 ـ	5	135	2.130	10.651
145 ـ 165	3	155	2.140	6.570
المجموع	75			138.683

$\because$ لو هـ = $\frac{\text{مجـ ك لو س}}{\text{ن}}$

$\therefore$ لو هـ = $\frac{138.683}{75} = 1.849$

وتكون هـ هي العدد المقابل لـ 1.849

$\therefore$ قيمة هـ = 70.63

ملاحظة: إيجاد المتوسط الهندسي للجدول التكراري ذي فترات غير متساوية الطول لا يستدعي تعديل التكرارات. كما أن الوسط الهندسي لهذا الجدول يسمى في بعض الأحيان بالمتوسط الهندسي المرجح.

3 ـ 6 ـ 2 خواص المتوسط الهندسي

1 ـ يفضل استخدامه عن باقي المتوسطات عند قياس معدل التغير ومتوسط التغير في الظواهر النسبية.

2 ـ يصعب إيجاد قيمته عندما يكون عدد القيم كبيراً.

3 ـ يتأثر بكل القيم ولكن أقل تأثراً بالقيم المتطرفة من المتوسط الحسابي.

4 ـ لا يستخدم المتوسط الهندسي إذا كانت إحدى القيم سالبة أو إذا كانت إحدى القيم تساوي صفراً.

5 ـ لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة أو عن طريق الرسم البياني.

6 ـ قابل للعمليات الجبرية.

3 ـ 7 المتوسط التوافقي:

لوصف بعض الظواهر النسبية وجد أن الأوساط السابقة لا توضح ولا تعطي الفكرة السليمة عن هذه الظواهر. فمثلاً إذا تم شراء 3 قطع من سلعة معينة بدينار ثم تم شراء 4 قطع أخرى بدينار، 5 قطع أخرى بدينار، فإذا سؤلت عن متوسط سعر القطعة الواحدة من هذه السلعة فغالباً ما تفكر في المتوسط الحسابي الذي يحدد كما يلي:

من الواضح أن سعر القطعة الواحدة من المجموعة الأولى هو 333.33 درهماً وسعر القطعة من المجموعة الثانية هو 250 درهماً، أما سعر القطعة الواحدة من المجموعة الثالثة فهو 200 درهماً ولذلك يكون متوسط سعر القطعة هو:

$$\frac{200 + 250 + 333.33}{3} = \frac{783.33}{3} = 261.11$$ درهماً

ولكن في الواقع أنه تم شراء 12 قطعة من هذه السلعة بمبلغ 3 دنانير وعليه يكون متوسط سعر القطعة الواحدة هو 250 درهماً وهو يختلف عن المتوسط الذي تم حسابه وإذا استخدمت المتوسط الهندسي وهو 255.4 كذلك يختلف عن المتوسط الفعلي. في مثل هذه الظواهر النسبية التي يكون فيها تمييز البيانات عكس تمييز المتوسط، وجد متوسط آخر يستخدم لوصف مثل هذه الظواهر، هذا المتوسط سمي بالمتوسط التوافقي ويعرف كما يلي:

إذا كانت $س_1$، $س_2$، $س_3$ .... ، $س_ن$ هي قيم لمتغير ما عددها

(ن) فإن المتوسط التوافقي لقيم هذا المتغير والذي يرمز له بالرمز (تَ) يساوي:

$$\frac{\text{ن}}{\frac{1}{\text{س}_1}+\frac{1}{\text{س}_2}+\frac{1}{\text{س}_3}+\ .....\ +\frac{1}{\text{س}_\text{ن}}} = \frac{\text{ن}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)}$$

$$\text{أي أن ت} = \frac{\text{ن}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)}$$

فإذا أردنا حساب المتوسط التوافقي للمثال السابق نجد أنه:

$$\text{ت} = \frac{3}{\frac{1}{200}+\frac{1}{250}+\frac{1}{333.33}} = 250 \text{ درهماً}$$

ومن الواضح أن هذا المتوسط أقرب إلى الواقع من المتوسطين الآخرين.

أما إذا كانت البيانات مبوبة في جداول تكرارية ذات فترات فإن متوسط التوافقي هو:

$$\text{ت} = \frac{\text{ن}}{\frac{\text{ك}_1}{\text{س}_1}+\frac{\text{ك}_2}{\text{س}_2}+\ ......\ +\frac{\text{ك}_\text{ن}}{\text{س}_\text{ن}}}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ك}}{\text{س}_\text{ر}}\right)}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ك}}{\text{س}}\right)}$$ وهو ما يعرف بالمتوسط التوافقي المرجح

حيث س_1، س_2، ......، $\text{س}_\text{ن}$ تمثل مراكز الفترات، ن تمثل مجموع التكرارات. ك_1، ك_2، ......، $\text{ك}_\text{ن}$ تمثل التكرارات المناظرة لمراكز الفترات السابقة. والجدول التالي يوضح طريقة إيجاد المتوسط التوافقي للجدول التكراري المعطى في المثال السابق.

الفترات	التكرار (ك)	مراكز الفترات (س)	خارج قسمة (ك/ س)
5_	4	15	0.2667
25_	6	35	0.1714
45_	15	55	0.2727
65_	22	75	0.2933
85_	13	95	0.1368
105_	7	115	0.0609
125_	5	135	0.0370
165_145	3	155	0.0194
المجموع	75		$\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}}{\text{س}}\right) = 1.2582$

$$\therefore \text{ت} = \frac{\text{ن}}{\text{مجـ}\left(\frac{\text{ك}}{\text{س}}\right)} = \frac{75}{1.2582} = 59.61$$

ملاحظة: عند إيجاد المتوسط التوافقي لتوزيع تكراري ذي فترات غير متساوية الطول لا داعي لتعديل التكرارات.

3 _ 7 _ 1 خواص المتوسط التوافقي:

1 _ يتأثر بكل القيم خاصة المتطرفة في الصغر.

2 _ ليس له معنى إذا كانت إحدى القيم مساوية للصفر.

3 _ يصف بأكثر واقعية البيانات النسبية التي يكون فيها تمييزها عكس تمييز المتوسط المراد حسابه.

4 _ لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة أو عن طريق الرسم.

5 _ قليل الاستخدام في القوانين والنظريات الإحصائية.

6 _ قابل للعمليات الجبرية.

العلاقة بين المتوسط الحسابي ـ المتوسط الهندسي ـ المتوسط التوافقي

إذا كانت قيم المتغير س كلها موجبة ومختلفة عن بعضها البعض فإن العلاقة التالية تكون صحيحة دائماً.

المتوسط الحسابي > المتوسط الهندسي > المتوسط التوافقي

أي أن:

سَ > هـ > ت

وإذا حسبنا المتوسط الحسابي للجدول التكراري المعطى في المثال السابق نجد أنه سَ = 79

وقد وجدنا أن هـ = 70.65، ت = 59.61 لنفس البيانات أي أن:

سَ > هـ > ت حيث 79 > 70.65 > 59.61

3 ـ 8 بعض الإحصاءات الأخرى:

لقد سبق وأن عرفنا الوسيط على أنه القيمة التي يسبقها 50% من عدد الحالة المعطاة في توزيع تكراري وعرفنا طريقة إيجاده حسابياً وبيانياً، وهناك مقاييس إحصائية أخرى ترتبط بمواقع نسبية لها في التوزيع التكراري وطرق حسابها تشبه طرق حساب الوسيط وهذه الإحصاءات هي:

1 ـ الربيع الأدنى (أو الربيع الأول):

وهو القيمي التي يسبقها 25% من عدد الحالات في توزيع تكراري ويرمز له بالرمز (ر_1) ويمكن إيجاده في حالة توزيع تكراري ذي فترات من العلاقة.

$$\text{ر}_1 = \text{ح}_1 + \left(\frac{\frac{\text{ن}}{4} - \text{جـ}}{\text{ك}}\right) \times \text{ل}$$

حيث ح_1 هو الحد الأدنى لفترة ر_1

$\frac{\text{ن}}{4}$ هو ترتيب ر_1

، جـ هو التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة ر_1 .

، ك هو تكرار فترة ر_1 .

، ل هو طول فترة ر_1 .

2 ـ الربيع الأعلى (أو الربيع الثالث):

وهو القيمة التي يسبقها 75% من عدد الحالات المعطاة في توزيع تكراري ويرمز له بالرمز (ر_3) ويحسب كما يلي:

$$\text{ر}_3 = \text{ح}_3 + \left(\frac{\frac{3\text{ن}}{4} - \text{جـ}}{\text{ك}}\right) \times \text{ل}$$

حيث ح_3 هو الحد الأدنى لفترة ر_3

، جـ هو التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة ر_3

، $\frac{3\text{ن}}{4}$ هو ترتيب ر_3

، ك هو تكرار فترة ر_3

، ل هو طول فترة ر_3

ملاحظة: يطلق على ر_2 إسم الوسيط أو الربيع الثاني.

3 ـ العشير الرائي (ويرمز له بالرمز $\text{ع}_\text{ر}$)

هو القيمة التي يسبقها (ر/10) من عدد الحالات في توزيع تكراري؛ فالعشير الثاني هو القيمة التي يسبقها (2/10) من عدد الحالات والعشير الخامس هو القيمة التي يسبقها (5/10) من عدد الحالات وهكذا...

4 ـ المئين الرائي (ويرمز له بالرمز $م_ر$)

وهو القيمة التي يسبقها (ر%) من عدد الحالات؛ فالمئين الخامس هو القيمة التي يسبقها (5%) من عدد الحالات والمئين التسعين هو القيمة التي يسبقها (90%) من عدد الحالات وهكذا... وعليه فإن:

العشير الخامس = المئين الخمسين = الوسيط

الربيع الأدنى = المئين الخامس والعشرين

الربيع الثاني = المئين الخمسين = الوسيط

الربيع الأعلى = المئين الخامس والسبعين.

مثال 8: أوجد كلاً من $ر_1$، $ر_3$، $\frac{ر_3 - ر_1}{2}$، $ع_5$، $م_{10}$، $م_{90}$ للجدول التكراري التالي حسابياً.

الدرجات	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ	80 ـ 90
عدد الطلاب	4	8	13	20	40	30	5

الحل

لإيجاد كل من هذه الإحصاءات لا بد من تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد.

الحدود العليا للفترات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 20	0
أقل من 30	4
أقل من 40	12
أقل من 50	25
أقل من 60	45
أقل من 70	85
أقل من 80	115
أقل من 90	120

لإيجاد $ر_1$ نوجد ترتيب $ر_1 = \frac{120}{4} = 30$

ومن ذلك نوجد فترة $ر_1$ وهي (50 ـ 60)

$$\therefore ر_1 = ح_د + \left(\frac{\frac{ن}{4} - ح}{ك}\right) \times ل$$

$$\therefore ر_1 = 50 + \left(\frac{30-25}{20}\right) \times 10$$

$$\because ر_1 = 50 + 2.5 = 52.5$$

لإيجاد $ر_3$ نوجد ترتيبه وهو $\frac{120 \times 3}{4} = 90$

ومن ذلك نوجد فترة $ر_3$ وهي (70 ـ 80)

$$\therefore ر_3 = ح_د + \left(\frac{\frac{3ن}{4} - ح}{ك}\right) \times ل$$

$$\therefore ر_3 = 70 + \left(\frac{90-85}{30}\right) \times 10$$

$$ر_3 = 70 + \frac{5}{3}$$

$$ر_3 = 70 + 1.67 = 71.67$$

ويكون $\frac{ر_3 - ر_1}{2} = \frac{52.5 - 71.67}{2} = 9.59$

لإيجاد $ع_8$ نوجد ترتيب $ع_8$ ويساوي:

$\frac{120 \times 8}{10} = 96$

ثم نوجد فترة $ع_8$ وهي (70 ـ 80)

$$\therefore ع_8 = ح_1 + \left(\frac{\frac{8ن}{10} - حـ}{ك}\right) \times ل$$

$$\therefore ع_8 = 10 \times \left(\frac{85 - 96}{30}\right) + 70$$

$$ع_8 = \frac{11}{3} + 70$$

$$= 3.67 + 70$$

$$= 73.67$$

لإيجاد $م_{10}$ نوجد ترتيب $م_{10}$ وهو $= \frac{120 \times 10}{100} = 12$

ومن ذلك نوجد فترة $م_{10}$ وهي (30 – 40)

$$\therefore م_{10} = ح_1 + \left(\frac{\frac{10ن}{100} - حـ}{ك}\right) \times ل$$

$$م_{10} = 10 \times \left(\frac{4 - 12}{8}\right) + 30$$

$$م_{10} + 30 + 10 = 40$$

لإيجاد $م_{90}$ نوجد ترتيب $م_{90}$ وهو $= \frac{120 \times 90}{100} = 108$

ومن ذلك نوجد فترة $م_{90}$ وهي (70 – 80)

$$\therefore م_{90} = ح_1 + \left(\frac{\frac{90ن}{100} - حـ}{ك}\right) \times ل$$

$$\therefore م_{90} = 10 \times \left(\frac{85 - 108}{30}\right) + 70$$

$$م_{90} = 77.67 = 7.67 + 70$$

ملاحظة: كل المقاييس الموضحة السابق ذكرها يمكن إيجاد قيمتها بيانياً وذلك برسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومراعاة ترتيب كل واحد منها.

تمارين

1 ـ أذكر خواص المتوسط الحسابي وبيّن كيف يمكن تقديره في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

2 ـ الجدول التالي يبين توزيع درجات 100 طالب في الامتحان النهائي لمادة مبادىء الإدارة.

الدرجات	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ	80 ـ 90
عدد الطلاب	3	10	20	32	25	10

والمطلوب: 1 ـ إيجاد الدرجة الوسيطية لهذا التوزيع.

2 ـ إيجاد الدرجة المنوالية لهذا التوزيع.

3 ـ تقدير المتوسط الحسابي لهذا التوزيع.

3 ـ الجدول التالي يبين أوزان 50 طالباً بالكيلو جرام:

الأوزان	25 ـ	30 ـ	35 ـ	40 ـ	45 ـ	50 فأكثر
عدد الطلبة	3	5	11	16	9	6

والمطلوب: رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ثم إيجاد الوسيط بيانياً.

4 ـ أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمتوسط الهندسي للتوزيع التكراري الآتي:

الفترات	40 ـ	46 ـ	52 ـ	58 ـ	64 ـ	70 ـ	76 ـ	82 ـ	90 – 80
التكرار	4	7	15	18	13	10	14	11	8

5 ـ فيما يلي توزيع 140 تشاركية تجارية حسب رؤوس أموالها بآلاف الدينارات:

الدينارات	8 ـ	10 ـ	15 ـ	18 ـ	20 ـ	25 ـ	30 – 50
عدد التشاركيات	7	15	32	43	28	12	3

والمطلوب: رسم المدرج التكراري لهذا التوزيع وإيجاد المنوال بيانياً.

6 ـ إحسب الوسط الحسابي العام سَ للبيانات التالية:

$ن_1 = 10$، $\bar{س}_1 = 40$، $ن_2 = 12$، $\bar{س}_2 = 50$، $ن_3 = 20$، $\bar{س}_3 = 60$

7 ـ عددان موجبان س، ص متوسطهما الحسابي يساوي 10 ومتوسطهما الهندسي يساوي $\sqrt[4]{6}$ فما هما العددان.

8 ـ الجدول التالي يبين توزيع درجات الامتحان النهائي لأربعين طالباً في مادة مبادىء المحاسبة:

الدرجات	10 ـ	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 – 60
عدد الطلاب	5	10	15	8	2

والمطلوب إيجاد كل من:

المتوسط الحسابي ـ المتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي لهذا التوزيع ثم المقارنة بينهما.

9 ـ فيما يلي بيان بالتوزيع التكراري لعدد الساعات التي يشتغلها المتجون في أحد المصانع أسبوعياً.

عدد الساعات	30 –	40 –	50 –	60 –	70 –	80 – 90
عدد المتجين	10	28	45	70	30	17

والمطلوب: إيجاد الربيعين بيانياً وتحقيق ذلك حسابياً إيجاد العشير الثالث بيانياً وتحقيق ذلك حسابياً.

10 ـ البيانات التالية توضح عدد المخالفات الإدارية والمالية لعدد من المنشآت.

المطلوب: حساب كل من المتوسط والوسيط والمنوال.

عدد المنشآت	2	1	5	4	6
عدد المخالفات الإدارية	6	11	5	6	3
عدد المخالفات المالية	3	5	3	4	2

11 ـ إذا كان متوسط درجة الحرارة في 6 مدن اليوم الماضي هو 20، فإذا علمت بأن درجات الحرارة في خمس مدن هي 30، 25، 18، 22، 26 فما هي درجة الحرارة في المدينة السادسة؟ وإذا كانت هذه البيانات تعبر عن إنتاج 6 مصانع فما هي إجابتك في هذه الحالة؟

12 ـ إذا كان جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات مجموعة من الطلبة كما يلي:

أقل من	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
التكرار المتجمع الصاعد	0	15	35	70	85	110	133	190	206	210

فاحسب قيمة المتوسط والوسيط والمنوال.

13 ـ إذا علمت أن مجموع انحرافات مجموعة من البيانات عن 3 هو ـ 1 وعن 2 هو 24 فأوجد عدد البيانات واحسب متوسطها.

14 ـ أوجد المتوسط والوسيط والمنوال للبيانات التالية:

القيمة	0	1	2	3	4 ـ 6	7 ـ 9
العدد	4	10	16	20	36	72

15 ـ إذا تم شراء سلعة ما حسب التوزيع التالي:

ثمن القطع بالدينار	10	20	30	50	60	80
عدد القطع	90	60	130	60	80	80

فاحسب متوسط ثمن القطعة ومتوسط عدد القطع للدينار الواحد.

16 ـ إذا كان دخل مجموعة من المنتجين لمجموعة من المنشآت موزعاً كما يلي:

الدخل	60 ـ 80	80 ـ 100	100 ـ 200	200 ـ 300	300 ـ 600
عدد المنشآت	16	13	10	10	14
عدد المنتجين بالمنشأة	4	5	10	5	3

فاحسب متوسط دخل المنتج لهذه المنشآت وأوجد الوسيط والمنوال لدخل هؤلاء المنتجين وأيهم في نظرك مناسب لوصف ظاهرة الدخل.

17 ـ إذا علمت بأن متوسط الأعداد 4.5, 7.9, 5.8, 3.2 هو 4.876 فإذا كانت تكرارات هذه القيم ك، (ك + 2)، (ك ـ 3)، (ك + 6) فأوجد قيمة ك، وأوجد قيمة الوسيط والمنوال.

18 ـ إذا علمت بأن متوسط دخل المنتج بمنشأة ما هو 320 د. ل في الشهر، فإذا تم زيادة دخل كل منتج بمقدار 50 د. ل في الشهر فما مقدار متوسط دخل المنتج الصافي إذا كان كل منتج يدفع 5% من متوسط دخله لصالح الإنتفاضة؟

19 ـ إذا كان متوسط درجات مجموعة من الطلبة في اختبار المحاسبة هو 60 فأوجد قيمة المتوسط الصحيحة إذا علمت بأن الدرجة 48 حسبت عن طريق الخطأ بدلاً من الدرجة 84 مع العلم بأن عدد الطلبة هو 100 .

20 ـ إذا علمت بأن المتوسط العام لأحد الطلبة في أربع مواد هو 68.75، فإذا كانت درجاته في هذه المواد هي 75، 60، 70، 80 فأوجد عدد وحدات المادة الأولى إذا علمت بأن عدد وحدات المواد الأخرى هي 3، 2، 1 على الترتيب.

21 ـ إذا علمت بأن متوسط ووسيط ومنوال 100 عدد هي على الترتيب 52،

60، 79 فأوجد قيم هذه الأوساط في الحالات التالية:

أ - إذا تم ضرب كل الأعداد في 4 .

ب - إذا تم إضافة 100 للعدد الأكبر فقط.

جـ - إذا تم إضافة 15 للعدد الأصغر فقط.

د - إذا حسب العدد 40 بدلاً من العدد 50 عن طريق الخطأ.

22 - إذا علمت بأن المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي لثلاثة أعداد هم 6، $4\sqrt[3]{3}$ ، $\frac{72}{13}$ فأوجد قيمتها في الحالات التالية:

أ - إذا تم ضرب كل الأعداد في 2 .

ب - إذا تم قسمة العدد الأصغر على 8 مع العلم بأن العدد الأصغر هو 4 .

جـ - إذا تم إضافة 10 للعدد الأكبر مع العلم أن العدد الأكبر هو 8 .

د - احسب وسيط هذه الأعداد الثلاثة.

23 - إذا علمت بأن سعر سلعة ما قد زاد سنة 86 بمقدار 20% عن سنة 85 وزاد سنة 87 بمقدار 30% وزاد سنة 88 بمقدار 50% فما مقدار متوسط الزيادة في سعر هذه السلعة؟

24 - إذا علمت بأن إنتاج أحد المصانع قد زاد السنة الأولى بنسبة 10% ونقص السنة الثانية بمقدار 5% وزاد السنة الثالثة بنسبة 15% وزاد السنة الرابعة بنسبة 6% فما مقدار متوسط التغير في الإنتاج؟

25 - إذا علمت بأن إحدى الآلات أنتجت 10 قطع اليوم الأول و20 قطعة اليوم الثاني و40 قطعة اليوم الثالث، فما متوسط زمن إنتاج القطعة الواحدة علماً بأن ساعات العمل اليومية هي 4 ساعات؟

26 - إذا كان توزيع درجات 50 طالباً كما يلي:

أكبر من	0	10	20	30	40	50	60
التكرار المتجمع النازل	50	46	40	20	10	3	0

فإذا علمت بأن نسبة النجاح كانت 60% فما هي درجة النجاح في هذا المقرر؟

27 - إذا كان توزيع درجات مجموعة من الطلبة في إمتحان لمقرر الإدارة كما يلي:

الدرجة	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
العدد	12	20	41	18	9

فأوجد نسبة عدد الطلبة الذين درجاتهم بين 15، 35 ونسبة الطلبة الذين درجاتهم أكبر من 24 .

28 - إذا علمت بأن الربيع الأول والربيع الثالث للبيانات التالية هما 12.5 ,25 فأوجد التكرارات المفقودة واحسب الوسيط.

الفترة	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
التكرار	4	8	أ	19	ب	10	د	جـ

29 - إذا علمت بأن التكرار المفقود للبيانات التالية هو التكرار الأكبر فأوجد قيمة المتوسط والوسيط والمنوال.

الفترة	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
التكرار	4	10	*	10	4

30 - إذا علمت بأن المنوال والوسيط للبيانات التالية هما 34، 33.5 فأوجد التكرارات المفقودة واحسب المتوسط الحسابي والعشير الرابع والمئين الستين مع العلم بأن المنوال حسب عن طريق الفروق وعدد البيانات 230 .

الفترة	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
التكرار	4	16	60	أ	ب	جـ	4

31 ـ إذا علمت بأن متوسط ووسيط توزيع قريب التماثل هما 23.5،25 فأوجد قيمة المنوال.

32 ـ أذكر أي الأوساط تستخدم لوصف الظواهر التالية ولماذا؟

أ ـ إنتاج أحد المصانع من سلع مختلفة.

ب ـ دخل مجموعة من المنتجين بمنشآت مختلفة.

جـ ـ إنتاج أحد المصانع اليومي إذا كان المصنع مغلقاً لمدة يومين.

د ـ نسبة الزيادة في الإنتاج لأربعة مصانع.

هـ ـ دخل مجموعة من الخريجين في ظروف متشابهة.

حل تمارين الباب الثالث

1 ـ أنظر بند 3 ـ 2 ـ 1 و 5.3 (نظري).

2 ـ لحساب المتوسط والوسيط نكون الجدول التالي:

الدرجة	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ	80 ـ 90	المجموع
عدد الطلاب	3	10	20	32	25	10	100
المركز $س_ر$	35	45	55	65	75	85	
ك س	105	450	1100	2080	1875	850	6450
التكرار المتجمع الصاعد	3	1	33	65	90	100	

1 ـ $\text{الوسيط} = ح_و + \frac{\left(\frac{ن}{2} - ج\right) ل}{ك}$

$\text{رتبة الوسيط} = \frac{ن}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$\therefore \text{الوسيط} = 60 + \frac{10(33 - 50)}{32} = 65.3$

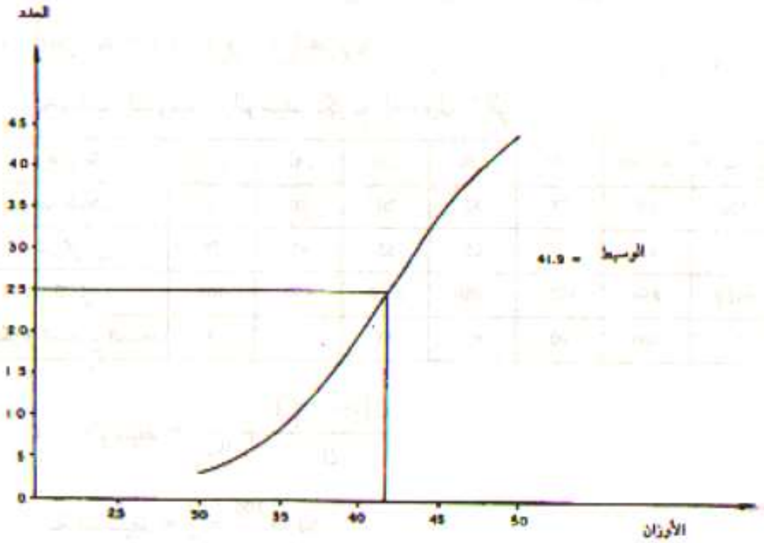
2 ـ $\text{المنوال} = ح_د + \frac{ف_1 ل}{ف_1 + ف_2}$

$ف_1 = 32 - 20 = 12$، $ف_2 = 32 - 25 = 7$

$\text{المنوال} = 60 + \frac{10 \times 12}{7 + 12} = 66.3$

3 ـ $\text{المتوسط الحسابي} = \frac{مج\ ك\ س}{مج\ ك} = \frac{6450}{100} = 64.5$

3 ـ الأوزان	25 ـ	30 ـ	35 ـ	40 ـ	45 ـ	50 فأكثر
عدد الطلبة	3	5	11	16	9	6
التكرار المتجمع الصاعد	3	8	19	35	44	50



4 ـ لحساب المتوسط والوسيط نكون الجدول التالي:

الفترة	40 ـ	46 ـ	52 ـ	58	64 ـ	70 ـ	76 ـ	82 ـ	88 ـ 94	المجموع
التكرار	4	7	15	18	13	10	14	11	8	100
المركز (س)	43	49	55	61	67	73	79	85	91	–
ك س	172	343	825	1098	871	730	1106	935	728	6808
التكرار المتجمع الصاعد	4	11	26	44	57	67	81	92	100	

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{6808}{100} = 68.08$$

$$\text{الوسيط} = \text{ح}_\text{د} + \frac{\left(\frac{\text{ن}}{2} - \text{جـ}\right)\text{ل}}{\text{ك}}$$

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{ن}}{2} = 50$$

$$\text{الوسيط} = 64 + \frac{6(44 - 50)}{13} = 66.77$$

$$\text{المنوال} = \text{ح}_\text{د} + \frac{\text{ف}_1 \times \text{ل}}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}$$

$\text{ف}_1 = 18 - 15 = 3$، $\text{ف}_2 = 18 - 13 = 5$

$$\text{المنوال} = 58 + \frac{6 \times 3}{5 + 3} = 60.25$$

ولحساب المتوسط الهندسي نكون الجدول التالي:

الفترة	التكرار	المركز (س)	لو س	ك لو س
40 ـ 46	4	43	1.63	6.52
46 ـ	7	49	1.69	11.83
52 ـ	15	55	1.74	26.1
58 ـ	18	61	1.79	32.22
64 ـ	13	67	1.83	23.79
70 ـ	10	73	1.86	18.6
76 ـ	14	79	1.9	26.6
82 ـ	11	85	1.93	21.23
88 ـ 94	8	91	1.96	15.68
				182.57

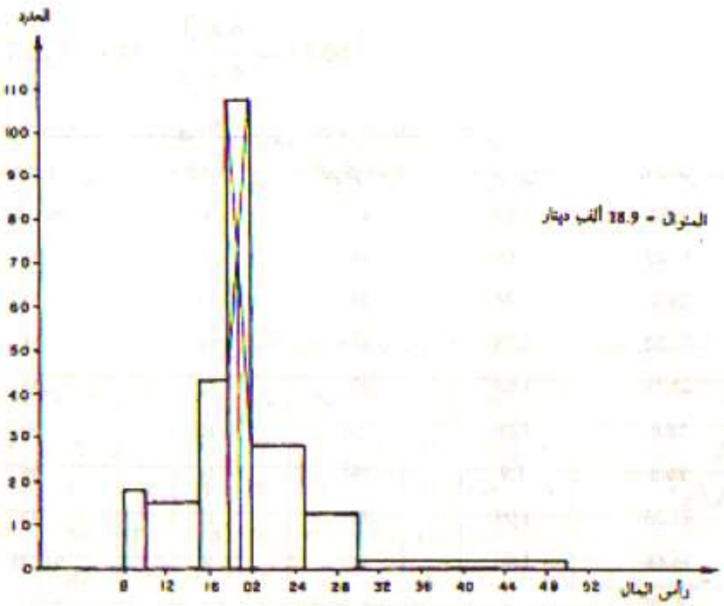
$$\text{هـ} = \sqrt[\text{مجـ ك}]{\text{س}_1^{\text{ك}_1}\ \text{س}_2^{\text{ك}_2} \cdots \text{س}_{\text{ن}}^{\text{ك}_{\text{ن}}}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{مجـ ك لو س}$$

$$= \frac{182.57}{100} = 1.8257$$

$$\therefore \text{هـ} = 66.9$$

5 ـ لرسم المدرج التكراري نحسب التكرار المعدل لأن أطوال الفترات غير متساوية، وباختيار طول فترة التناسب وهو 5 تكون التكرارات المعدلة حسب القانون التالي: التكرار المعدل = $\frac{\text{طول فترة التناسب}}{\text{طول فترة التكرار}}$ × التكرار هي كما يلي: 18، 15، 53، 108، 28، 12، 1 وبذلك يكون المدرج التكراري كما يلي:



6 ـ $\text{المتوسط العام} = \frac{\text{مجـ ن}_{\text{ر}}\ \bar{\text{س}}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ن}_{\text{ر}}}$

$$= \frac{60 \times 20 + 50 \times 12 + 40 \times 10}{20 + 12 + 10} = 52.38$$

7 ـ $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} = 10 \qquad \therefore \text{س} + \text{ص} = 20$

$\text{هـ} = \sqrt{\text{س ص}} = 4\sqrt{6} \qquad \therefore \text{س ص} = 96$

$$\therefore \text{س} + \frac{96}{\text{س}} = 20$$

$$\text{س}^2 - 20\,\text{س} + 96 = 0$$

$$(\text{س} - 8)\,(\text{س} - 12) = 0$$

$$\text{س} = 8 \text{ أو } \text{س} = 12$$

∴ العددان هما 8، 12 .

8 ـ لحساب المطلوب نكون الجدول التالي:

الفترة	التكرار (ك)	المركز (س)	ك س	لو س	ك لو س	$\frac{\text{ك}}{\text{س}}$
10 ـ	5	15	75	1.18	5.9	.33
20 ـ	10	25	250	1.4	14	.6
30 ـ	15	35	525	1.54	23.1	.43
40 ـ	8	45	360	1.64	13.2	.18
50 ـ 60	2	55	110	1.74	3.84	.04
المجموع	40		1320		59.68	1.58

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{1320}{40} = 35.2$$

$\text{لو هـ} = \frac{59.68}{40} = 1.492 \qquad \therefore \text{هـ} = 31.05$

$$\text{ت} = \frac{\text{ن}}{\text{مجـ} \frac{\text{ك}}{\text{س}}} = \frac{40}{1.58} = \frac{40}{1.58} = 25.3$$

$\therefore \bar{\text{س}} > \text{هـ} > \text{ت}$

9 ـ

عدد الساعات	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ	80 ـ 90
عدد المتجين	10	28	45	70	30	17
التكرار المتجمع الصاعد	10	38	83	153	183	200

$$\text{ر}_1 = \text{ح}_1 + \frac{\left(\frac{\text{ن}}{4} - \text{ح}\right)\text{ل}}{\text{ك}}$$

$$\text{رتبة } (\text{ر}_1) = \frac{\text{ن}}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

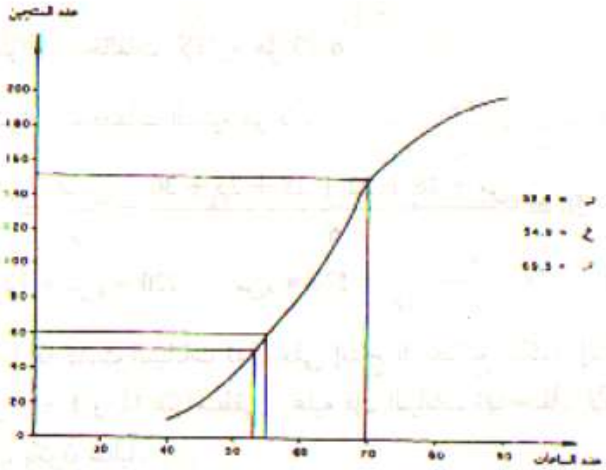
$$\therefore \text{ر}_1 = 50 + \frac{10(38 - 50)}{45} = 52.67$$

$$\text{رتبة ر}_3 = \frac{3 \times \text{ن}}{4} = 150$$

$$\text{ر}_3 = 60 + \frac{10(83 - 150)}{70} = 69.57$$

$$\text{رتبة ع}_3 = \frac{3 \times \text{ن}}{10} = 60$$

$$\therefore \text{ع}_3 = \text{ح}_1 + \frac{\left(\text{حـ} - 3 \times \frac{\text{ن}}{10}\right)\text{ل}}{\text{ك}} = 50 + \frac{10(38 - 60)}{45} = 54.89$$



10 ـ نرتب البيانات كما يلي:

عدد المخالفات الإدارية س	3	5	6	11	المجموع
التكرار ك$_{س}$	6	5	6	1	18
عدد المخالفات المالية ص	2	3	4	5	
التكرار ك$_{ص}$	6	7	4	1	18
ك$_{س}$ س	18	25	36	11	90
ك$_{ص}$ ص	12	21	16	5	54
التكرار المتجمع الصاعد للادارية	6	11	17	18	
التكرار المتجمع الصاعد للمالية	6	13	17	18	

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{90}{18} = 5 \text{ ، } \bar{\text{ص}} = \frac{54}{18} = 3$$

رتبة الوسيط = $\frac{\text{ن}}{2}, \frac{\text{ن}}{2} + 1$ هما 9، 10 .

وسيط المخالفات الإدارية 5

وسيط المخالفات المالية 3

منوال المخالفات الإدارية هو 3، 6

منوال المخالفات المالية هو 3 .

11 ـ $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{30 + 25 + 18 + 22 + 26 + \text{س}_6}{6} = 20$

121 + س$_6$ = 120 ∴ س$_6$ = − 1

أما إذا كانت البيانات تدل على إنتاج 6 مصانع فتكون إنتاج المصنع السادس = − 1 وهذا غير منطقي ـ عليه فإن البيانات بها خطأ، لأن الإنتاج لا يمكن أن يكون سالباً.

12 ـ نكون جدول التوزيع التكراري كما يلي:

الفترة	التكرار	المركز (س)	ح = س − 45	$\text{ح}' = \frac{\text{ح}}{10}$	ك ح'	التكرار المتجمع الصاعد
0 ـ 10	15	5	40 ـ	4 ـ	60 ـ	15
10 ـ 20	20	15	30 ـ	3 ـ	60 ـ	35
20 ـ 30	35	25	20 ـ	2 ـ	70 ـ	70
30 ـ 40	15	35	10 ـ	1 ـ	15 ـ	85
40 ـ 50	25	45	0	0	0	110
50 ـ 60	23	55	10	1	23	133
60 ـ 70	57	65	20	2	114	190
70 ـ 80	16	75	30	3	48	206
80 ـ 90	4	85	40	4	16	210
المجموع	210				4 ـ	

$$\therefore \bar{\text{س}} = \text{و} + \frac{\text{مجـ ك ح}'}{\text{مجـ ك}} \times \text{ل} = 45 - \frac{4 \times 10}{210} = 44.81$$

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{ن}}{2} = \frac{210}{2} = 105$$

$$\text{الوسيط} = \text{ح}_\text{د} + \frac{(\frac{\text{ن}}{2} - \text{د})\text{ل}}{\text{ك}} = 40 + \frac{10(85 - 105)}{25} = 48$$

$$\text{المنوال} = \text{ح}_\text{د} + \frac{\text{ف}_1 \times \text{ل}}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}$$

ف$_1$ = 57 ـ 23 = 34، ف$_2$ = 57 ـ 16 = 41

$$\text{المنوال} = 60 + \frac{34 \times 10}{34 + 41} = 64.53$$

13 ـ مجـ (س ـ 3) = − 1 (1)

مجـ (س ـ 2) = 24 (2)

مجـ س ـ 3 ن = − 1 (3)

مجـ س ـ 2 ن = 24 (4)

بطرح 3 من 4 نحصل على:

ن = 25

∴ مجـ س = 3 ن ـ 1 = 74

$$\therefore \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{74}{25} = 2.96$$

14 ـ

القيمة	0	1	2	3	4 ـ 6	7 ـ 9	المجموع
العدد (ك)	4	10	16	20	36	72	158
س	0	1	2	3	5	8	
ك س	0	10	32	60	180	576	858
التكرار المتجمع الصاعد	4	14	30	50	86	158	

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{858}{158} = 5.43$$

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{ن}}{2} = \frac{158}{2} = 79$$

حيث أن الوسيط يقع ضمن فترة تستخدم قانون الوسيط وهو

الوسيط $= \text{ح}_1 + \frac{\left(\frac{\text{ن}}{2} - \text{ح}\right)\text{ل}}{\text{ك}}$ ونستخدم الحدود الحقيقية

$$= 3.5 + \frac{3(50 - 79)}{36} = 5.92$$

حيث أن أكبر تكرار يقع في الفترة الأخيرة ولا يوجد تكرار، بعدها نحسب المنوال باعتبار أكبر تكرار يقابل مركز الفترة عليه يكون المنوال = 8

15 ـ نحسب ثمن القطعة الواحدة في كل حالة:

$\text{س}_1 = \frac{10}{90} = 0.111$ دينار للقطعة الواحدة

$\text{س}_2 = \frac{20}{60} = 0.333$ دينار للقطعة الواحدة

$\text{س}_3 = \frac{30}{130} = 0.231$ دينار للقطعة الواحدة

$\text{س}_4 = \frac{50}{60} = 0.833$ دينار للقطعة الواحدة

$\text{س}_5 = \frac{60}{80} = 0.75$ دينار للقطعة الواحدة

$\text{س}_6 = \frac{80}{80} = 1$ دينار للقطعة الواحدة

المتوسط التوافقي $= \frac{6}{1 + \frac{1}{.75} + \frac{1}{.833} + \frac{1}{.231} + \frac{1}{.333} + \frac{1}{.111}} = \frac{6}{19.875} =$

0.302 دينار لكل قطعة ومتوسط عدد القطع للدينار الواحد هو:

$$\frac{6}{1 + .75 + .833 + .231 + .333 + .111} = 1.84$$ قطعة لكل دينار

وبحساب المتوسط الحسابي نجد أن:

$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{3.258}{6} = 0.543$ دينار لكل قطعة.

نلاحظ الفرق بين المتوسطين كبيراً وهذا راجع لأن وحدة التمييز لكل حالة ليست ثابتة. وفي الواقع فإن المتوسط التوافقي يعطي فكرة أقرب إلى الواقع من المتوسط الحسابي عندما تكون وحدة التمييز ثابتة بكل الحالات. وفي هذا المثال نلاحظ أن ثمن القطع غير ثابت، عليه فإن المتوسط الحسابي يكون أفضل في مثل هذه الحالات.

16 ـ

الدخل	80 ـ 60	100 ـ 80	200 ـ 100	300 ـ 200	600 ـ 300	المجموع
عدد المنشآت	16	13	10	10	14	
عدد المتجين بالمنشأة	4	5	10	5	3	
عدد المتجين بالمنشآت	64	65	100	50	42	321
المركز س	70	90	150	250	450	
ك س	4480	5850	15000	12500	18900	56730
التكرار المتجمع الصاعد	64	129	229	279	321	

$$\therefore\ \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{56730}{312} = 176.73$$

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{321}{2} = 160.5$$

$$\text{الوسيط} = \text{ح}_1 + \frac{\left(\frac{\text{ن}}{2} - \text{ح}\right)\text{ل}}{\text{ك}} = 100 + \frac{100(129 - 160.5)}{100} = 131.5$$

لحساب المنوال الذي يعتمد على تكرار الفترتين السابقة واللاحقة للفترة المنوالية يجب حساب التكرار المعدل لأن طول الفترتين غير متساو، وذلك كما يلي باختيار طول الفترة 100.

الدخل	80 ـ 60	100 ـ 80	200 ـ 100	300 ـ 200	600 ـ 300
التكرار المعدل	320	325	100	50	14

$$\text{المنوال} = \text{ح}_1 + \frac{\text{ف}_1\,\text{ل}}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}$$

$\text{ف}_1 = 325 - 320 = 5$، $\text{ف}_2 = 325 - 100 = 225$

$$\text{المنوال} = 80 + \frac{20 \times 5}{230} = 80.4$$

الوسط المناسب لوصف هذه المعطيات هو الوسيط لأنه يوجد تطرف في البيانات.

17 ـ

القيمة	3.2	5.8	7.9	4.5
التكرار	ك	ك + 2	ك ـ 3	ك + 6
ك س	3.2 ك	5.8 (ك + 2)	7.9 (ك ـ 3)	4.5 (ك + 6)

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\therefore 4.876 = \frac{3.2ك + 5.8ك + 11.6 + 7.9ك - 23.7 + 4.5ك + 27}{4ك + 5}$$

$\therefore 19.504\,ك + 24.38 = 21.4ك + 14.9$

$\therefore 9.48 = 1.896ك$

$\therefore ك = 5$

وبذلك يصبح الجدول كما يلي:

القيمة	3.2	5.8	7.9	4.5
التكرار	5	7	2	11

لحساب الوسيط ترتب القيم:

القيمة	3.2	4.5	5.8	7.9
التكرار	5	11	7	2
التكرار المتجمع الصاعد	5	16	23	25

حيث أن فردية تكون رتبة الوسيط $= \frac{ن + 1}{2} = 13$

$\therefore$ الوسيط هو 4.5

المنوال هو 4.5 لأنها تقابل أكبر تكرار 11.

18 ـ $\bar{س} = 320$

المتوسط بعد الزيادة = المتوسط قبل الزيادة + متوسط الزيادة

$= 320 + 50 = 370$

متوسط الدخل بعد الخصم $= 370 \times .95 = 351.5$

19 ـ $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} \therefore 60 = \frac{\text{مجـ س}}{100} \therefore \text{مجـ س} = 6000$

المجموع الصحيح $= 6000 - 48 + 84 = 6036$

$\therefore$ المتوسط الصحيح $= \frac{6036}{100} = 60.36$

20 ـ

الدرجة	75	60	70	80
عدد الوحدات	ك	3	2	1

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ و س}}{\text{مجـ و}} \therefore \frac{75 \times ك + 60 \times 3 + 70 \times 2 + 80 \times 1}{ك + 3 + 2 + 1}$$

$\therefore 412.5 + 68.75ك = 75\,ك + 400$

$\therefore 12.5 = 6.25ك$

$\therefore ك = 2$

21 ـ المتوسط = 52، الوسيط = 60، المنوال = 79، ن = 100

أ ـ $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن} \therefore \text{مجـ س} = 5200$

المتوسط بعد التغيير = $\frac{\text{مجـ }4\text{س}}{\text{ن}} = 4\,\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = 4 \times 52 = 208$

الوسيط بعد التغير = الوسيط قبل التغير × 4 = 160 لأن الوسيط قيمة في الوسط وحيث أنه تمّ ضرب كل القيم في 4 عليه سوف تضرب قيمة الوسيط في 4.

كذلك المنوال قبل التغير 79 وتمّ ضرب كل القيم في 4 فسوف تضرب قيمة المنوال في 4 ويصبح 316.

ب ـ إذا تم إضافة 100 للعدد الأكبر فقط. بالنسبة إلى المتوسط إذا كان العدد الأكبر عدداً واحداً فقط يكون المتوسط الجديد = المتوسط الأصلي + متوسط الزيادة = $52 + \frac{100}{100} = 53$

أما إذا كان العدد الأكبر أكثر من عدد واحد لا تستطيع تحديد قيمة المتوسط إلا بمعرفة عدد (تكرار) العدد الأكبر.

الوسيط لا يتغير لأن زيادة العدد الأكبر لا يغير الترتيب. المنوال يتغير إذا كان المنوال هو العدد الأكبر ويصبح 79 + 100 = 179. أما إذا كان المنوال ليس هو العدد الأكبر فلا يتغير ويبقى 79.

جـ ـ المتوسط: إذا كان العدد الأصغر هو عدد واحد يكون المتوسط بعد الزيادة = $52 + \frac{15}{100} = 52.15$

أما إذا كان تكرار العدد الأصغر أكبر من واحد لا نستطيع تحديد المتوسط إلا بمعرفة تكرار العدد الأصغر.

الوسيط: ∵ زيادة العدد الأصغر قد يغير الترتيب، عليه لا نستطيع تحديد قيمة الوسيط إلا بمعرفة كل القيم. أما المنوال فلا يتغير لأنه من القيم الكبيرة وتمّ زيادة قيمة صغيرة.

د ـ إذا حسب العدد 40 بدلاً من العدد 50

فالمتوسط الجديد = المتوسط الأصلي + متوسط التغير

$= 52 + \frac{40-50}{100} = 52.1$

الوسيط لا نستطيع تحديده لأن التغير حدث في القيم الصغيرة وهذا قد يغير الترتيب.

أما المنوال لا يتغير لأن التغيير في القيم الصغيرة والمنوال من القيم الكبيرة.

22 ـ نفرض أن الأعداد الثلاثة مرتبة تصاعدياً هي س_1، س_2، س_3

∴ $\text{س}_1 < \text{س}_2 < \text{س}_3$

$\bar{\text{س}} = 6$، هـ = $4\sqrt[3]{3}$ ، ت = $\frac{72}{13}$

∴ من الفقرة ب نجد أن $\text{س}_1 = 4$

∴ من الفقرة جـ نجد أن $\text{س}_3 = 8$

∴ مجـ س = 18 ∴ $\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 = 18$

$4 + \text{س}_2 + 8 = 18$

$\text{س}_2 = 6$

∴ الأعداد هي 4، 6، 8 .

أ ـ إذا تم ضرب كل الأعداد في 2 يكون:

المتوسط الحسابي = 12

المتوسط الهندسي = $8\sqrt[3]{3}$

المتوسط التوافقي = $\frac{144}{13}$

ب ـ إذا تم قسمة العدد الأصغر على 8 فيصبح 0.5 فتكون الأوساط هي:

المتوسط الحسابي = 4.83

المتوسط الهندسي = $2\sqrt[3]{3}$

المتوسط التوافقي = 1.31

جـ ـ إذا تم إضافة 10 للعدد الأكبر فيصبح 18

$\therefore \bar{س} = \frac{18+6+4}{3} = 9.3$

هـ $= \sqrt[3]{18 \times 6 \times 4} = 6\sqrt[3]{2}$

$ت = \frac{3}{\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} = 6.35$

د ـ الوسيط هو 8

23 ـ

السنة	85	86	87	88
نسبة التغير لسنة 85	100	120	130	150
نسبة التغير كل سنة إلى السنة التي قبلها	100	120	156	234

$\because$ القيم نسب مئوية نستخدم المتوسط الهندسي

متوسط التغير نسبة إلى 85 = $\sqrt[3]{150 \times 130 \times 120} = 132.76$

$\therefore$ متوسط الزيادة هي 32.76%

متوسط التغير كل سنة نسبة إلى السنة التي قبلها

هو $\sqrt[3]{234 \times 156 \times 120} = 163.61$%

$\therefore$ متوسط الزيادة هو 63.61%

24 ـ نستخدم المتوسط الهندسي كما يلي:

إذا كانت نسبة التغير كلها منسوبة إلى سنة الأساس تكون نسب التغير كما يلي:

السنة	الأساس	1	2	3	4
نسب التغير	100	110	95	115	106

يكون متوسط نسبة التغير هو $\sqrt[4]{106 \times 115 \times 95 \times 110} = 106.2$%

إذا النسب محسوبة كل سنة إلى السنة التي قبلها يكون:

السنة	الأساس	1	2	3	4
نسبة التغير	100	110	104.5	120.18	127.39

ويكون متوسط التغير = $\sqrt[4]{127.39 \times 120.18 \times 104.5 \times 110} = 115.18$%

25 ـ نحسب زمن إنتاج القطعة الواحدة لكل يوم:

اليوم الأول زمن إنتاج القطعة = $\frac{240}{10}$ = 24 دقيقة/ قطعة

اليوم الثاني زمن إنتاج القطعة = $\frac{240}{20}$ = 12 دقيقة/ قطعة

اليوم الثالث زمن إنتاج القطعة = $\frac{240}{40}$ = 6 دقائق/ قطعة

حيث أن البيانات معطاة بتمييز قطعة نسبة إلى الزمن والمراد حساب متوسط تمييزه زمن نسبة إلى القطعة نستخدم المتوسط التوافقي:

$\therefore ت = \frac{ن}{\sum \frac{1}{س}} = \frac{3}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}} = 10.3$ دقيقة/ قطعة.

وهو متوسط زمن إنتاج القطعة الواحدة.

26 ـ نكون جدول التوزيع التكراري كما يلي:

الدرجة	0 ـ 10	10 ـ 20	20 ـ 30	30 ـ 40	40 ـ 50	50 ـ 60
التكرار	4	6	20	10	7	3
التكرار المتجمع الصاعد	4	10	30	40	47	50

∴ نسبة النجاح 60% عليه فإنّ عدد الناجحين 30 فيكون عدد الراسبين 20، وبذلك تكون درجة النجاح هي الدرجة التي تقسم المجموعة إلى مجموعتين عدد الذي أقل منها 20 والذي أكبر منها 30 . وبالنظر إلى التكرار المتجمع الصاعد نجد أن هذه الدرجة تقع في الفترة 20 ـ 30، وباستخدام القانون التالي نحصل على درجة النجاح.

درجة النجاح = ح، + (الرتبة − ح،)ل / ك

$= \frac{10(10 - 20)}{20} = 25$

27 ـ

الدرجة	0 ـ 10	10 ـ 20	20 ـ 30	30 ـ 40	40 ـ 50
العدد	12	20	41	18	9
التكرار المتجمع الصاعد	12	32	73	91	100

نحسب عدد الطلبة الذين درجاتهم أقل من 15 وحيث أن الدرجة 15 تقع في الفترة 10 ـ 20 نفرض أن عدد الطلبة الذين درجاتهم أقل من 15 هو س، عليه تكون الدرجة = ح، + (الرتبة − ح،)ل / ك

15 = 10 + (س − 12)10 / 20

∴ س = 22

وبالطريقة نفسها نحسب عدد الطلبة الذين درجاتهم أقل من 35 نجد أنّ:

35 = ح، + (الرتبة − ح،)ل / ك

= 30 + (س − 73)10 / 18

∴ س = 82

عليه فإن عدد الطلبة الذين درجاتهم بين 15، 35 هم 82 ـ 22 = 60 ونسبتهم $\frac{60}{100}$ × 100 = 60%

بتطبيق القانون السابق بالنسبة إلى الدرجة 24 نحصل من القانون على عدد الطلبة الذين درجاتهم أقل من 24 كما يلي:

24 = ح، + (الرتبة − ج،)ل / ك

حيث 24 تقع في الفقرة 20 ـ 30

∴ 24 = 20 + (س − 12)10 / 20

∴ س = 20

عليه يكون عدد الطلبة الذين درجاتهم أكبر من 24 هو 100 ـ 20 = 80 ونسبتهم هي 80%.

28 ـ المعلومات المعطاة لا تكفي لحساب التكرارات المجهولة لأن عدد المجاهيل 4 وعدد المعادلات المعطاة 2 فقط، هما معادلتا الربيع الأول والربيع الثالث.

29 ـ حيث أن التكرار المجهول أكبر التكرارات يدل على أن الفترة المنوالية هي 40 ـ 60 وحيث أن التكرار الذي قبلها مساوٍ للتكرار الذي بعدها عليه يكون المنوال مقابل المركز.

∴ المنوال = 50. وحيث أن التكرارات متماثلة التوزيع حول الفترة المنوالية عليه يكون

المتوسط = الوسيط = المنوال = 50.

30 ـ نكون الجدول التالي:

الفترة	10 ـ 0	20 ـ 10	30 ـ 20	40 ـ 30	50 ـ 40	60 ـ 50	70 ـ 60
التكرار	4	16	60	أ	ب	جـ	4
ت. م. ص	4	20	80	أ + 80	أ + ب + 80	أ + ب + جـ + 80	230

230 = أ + ب + جـ + 80 + 4

∴ أ + ب + جـ = 146

∵ الوسيط = $ح_د + \frac{\left(\frac{ن}{2} - جـ\right)ل}{ك}$

∵ الوسيط = 33.5 عليه يقع في الفترة 30 ـ 40

∴ $33.5 = 30 + \frac{10\left(80 - \frac{230}{2}\right)}{أ}$

∴ 3.5 أ = 350 ⟵ أ = 100

∵ المنوال = 34، عليه فإن الفترة المنوالية هي 30 ـ 40

∴ المنوال = $ح_د + \frac{ف_1 \times ل}{ف_1 + ف_2}$

$ح_د$ = 30، $ف_1$ = 100 ـ 60 = 40، $ف_2$ = 100 − ب

∴ $34 = 30 + \frac{40 \times 10}{40 + 100 - ب}$

∴ 560 ـ 4 ب = 400

∴ ب = $\frac{160}{4}$ = 40

بالتعويض في (1) عن أ، ب نجد أن:

أ + ب + جـ = 146

100 + 40 + جـ = 146

∴ جـ = 6

∴ المتوسط = $\frac{65 \times 4 + 55 \times 6 + 45 \times 40 + 35 \times 100 + 25 \times 60 + 15 \times 16 + 5 \times 4}{230}$

$= \frac{7650}{230} = 33.26$

العشير الرابع = $ع_4 = ح_د + \frac{\left(4 \times \frac{ن}{10} - جـ\right)ل}{ك}$

رتبة العشير الرابع = $\frac{4 \times ن}{10} = 4 \times \frac{230}{10} = 92$

∴ $ع_4 = 30 + \frac{10(80 - 92)}{100} = 30.8$

رتبة المئين الستين $م_{60}$ = $\frac{60 \times ن}{100} = 138$

∴ $م_{60} = ح_د + \frac{ل(جـ - 138)}{ل} = 30 + \frac{10(80 - 138)}{100} = 35.8$

31 ـ ∵ التوزيع قريب من التماثل، عليه فإن:

المتوسط ـ المنوال = 3(المتوسط ـ الوسيط)

∴ 25 ـ المنوال = 3(25 ـ 23.5)

∴ المنوال = 25 ـ 4.5 = 20.5

32 ـ أ ـ المنوال، لأن المعطيات نوعية يصاحبها كميات.

ب ـ ∵ المنشآت مختلفة نستبعد أن يكون هناك تجانساً، عليه نستخدم الوسيط إذا كان هناك تطرفاً أو المنوال إذا كان هناك تكدساً.

جـ ـ الوسيط لأن هناك تطرفاً.

د ـ المتوسط الهندسي لأن المعطيات نسب مئوية.

هـ ـ المتوسط الحسابي لأن المعطيات متجانسة.

4 – التشتت

Dispersion

4 ـ 1 مقدمة:

من دراستنا لظاهرة النزعة المركزية اتضح لنا أن الأوساط المختلفة تصف وتوضح فكرة عامة عن البيانات التي حسبت منها كل حسب طبيعة هذه البيانات، وحيث أن اهتمامنا في هذا المقرر هو وصف البيانات فمما لا شك فيه لكي يكون الوصف شاملاً وقريباً من الواقع لا نستطيع الاعتماد على صفة واحدة للبيانات وهي ظاهرة النزعة المركزية، فإذا أمكن معرفة صفات أخرى للبيانات يمكننا استخدامها في الوصف سوف يكون الوصف أقرب إلى حقيقة البيانات، وفي الواقع نلاحظ أننا نستخدم هذا المنطق في الوصف في حياتنا اليومية؛ فمثلاً لا نستطيع معرفة وتحديد شخص ما بمعرفة اسمه فقط، ولا يمكننا الحصول على كتاب من المكتبة بمعرفة اسم الكتاب فقط ولكن إذا توفرت لدينا معلومات أخرى عنهما لأمكننا معرفتهما وتحديدهما تحديداً تاماً.

كذلك نجد أنه عند مقارنة ظاهرتين أو أكثر تساوت أوساطهما فإن اعتمادنا على ظاهرة النزعة المركزية فقط غالباً ما يجعل المقارنة غير واقعية وغير سليمة.

وفي الواقع هناك عدة صفات أخرى للبيانات نذكر منها ظاهرة التشتت التي تدل على درجة التفاوت أي الاختلاف بين القيم؛ فإذا كانت قيم المجموعة متقاربة (متجانسة) من بعضها البعض كان تشتتها صغيراً، وإذا كانت

القيم متباعدة (غير متجانسة) عن بعضها البعض كان تشتتها كبيراً.

فمثلاً إذا كانت لدينا درجات طالبين في 5 اختبارات لأحد المقررات كما يلي:

درجات الطالب الأول	70	98	3	37	52
درجات الطالب الثاني	54	50	51	52	53

فإذا أردنا مقارنة وضع الطالبين في هذا المقرر اعتماداً على ظاهرة النزعة المركزية نجد أن المتوسط = الوسيط = 52 لكل منهما، مما يؤدي إلى فهم أن الطالبين لهما نفس المستوى في هذه الإختبارات. ولكن بالتمعن في درجات كل منهما نلاحظ أن درجات الطالب الأول أكثر تشتتاً وأقل تجانساً من درجات الطالب الثاني التي تعتبر درجاته أكثر تجانساً وأقل تشتتاً، أي أن الاختلاف بين درجات الطالب الثاني قليل بينما الاختلاف بين درجات الطالب الأول كبير.

عليه فإن ظاهرة التشتت ساعدتنا في المقارنة المنطقية والواقعية بين درجات الطالبين وساهمت بإضافة معلومات أخرى عن البيانات تجعل الوصف أكثر شمولاً ووضوحاً من الاعتماد على المتوسطات فقط.

وفي الواقع صفة وخاصية التشتت نلاحظهما في كل الظواهر التي حولنا ولكن يختلف مقدارها من ظاهرة إلى أخرى، ولكن كيف يمكننا معرفة مقدار التشتت للبيانات؟ لقد وجدت مقاييس لظاهرة التشتت وهي:

1 ـ المدى.

2 ـ الانحراف الربيعي.

3 ـ متوسط الانحراف المطلق.

4 ـ الانحراف المعياري والتباين.

5 ـ معامل الاختلاف.

وسوف نتعرض لهذه المقاييس من حيث المفهوم وطريقة الحساب.

4 ـ 2 المدى:

وهو الفرق المطلق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في المجموعة ويعتبر من أبسط وأسهل مقاييس التشتت مفهوماً وحساباً، حيث يوضح فكرة بسيطة وعامة عن تشتت البيانات فهو مقياس غير دقيق ولكنه كثير الاستخدام في الأوساط العامة وفي النواحي الاقتصادية والاجتماعية خاصة للعينات الصغيرة جداً المستعملة في الرقابة الإحصائية على جودة الإنتاج. فمثلاً في المثال السابق الذي يوضح درجات الطالبين نجد أن:

المدى لدرجات الطالب الأول = 98 ـ 3 = 95 أما المدى لدرجات الطالب الثاني = 54 ـ 50 = 4

ومن ذلك نفهم رغم أن متوسط درجات الطالبين متساوٍ ولكن تشتت درجات الطالب الأول أكبر بكثير من تشتت درجات الطالب الثاني، أي أن درجات الطالب الثاني أكثر انتظاماً وتجانساً من درجات الطالب الأول.

4 ـ 3 الانحراف الربيعي:

رغم بساطة المدى إلا أنه قد يكون عرضة للتطرف لأنه يعتمد في حسابه على قيمتين هما عرضة للتطرف، لذلك فكر الإحصائيون في مقياس آخر لا يعتمد في حسابه على القيم المتطرفة، هذا المقياس هو الانحراف الربيعي ويحسب كالآتي:

الانحراف الربيعي = الربيع الثالث ـ الربيع الأول = $ر_3 - ر_1$ ويقسم على 2 ويمسى الناتج نصف الانحراف الربيعي.

ويوضح هذا المقياس طول الفترة التي تحتوي على نصف عدد البيانات متوسطة القيم، كما أنه المقياس الوحيد الذي يستخدم لقياس التشتت للتوزيعات التكرارية المتفوحة.

مثال: الجدول التالي يبين توزيع الدخل بإحدى المنشآت والمطلوب

إيجاد مقياس مناسب لتشتت هذا الدخل.

الدخل	100 ـ	150 ـ	200 ـ	250 ـ	300 ـ	350 فأكثر
العدد	10	25	50	58	16	5

حيث أن الفترة الأخيرة مفتوحة عليه يكون الانحراف الربيعي هو المقياس المناسب للاختلاف في الدخل لهذه المنشأة وذلك كما يلي:

1 ـ نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد:

الدخل	100 ـ 150	150 ـ 200	200 ـ 250	250 ـ 300	300 ـ 350	350 فأكثر
العدد	10	25	50	58	16	5
التكرار المتجمع الصاعد	10	35	85	143	159	164

2 ـ نحسب كلاً من $ر_1$، $ر_3$ كما يلي:

نحدد رتبة $ر_1$ وهي $\frac{ن}{4} = \frac{164}{4} = 41$

ثم نحدد فترة $ر_1$ وهي (200 ـ 250) والتكرار المتجمع السابق لها هو 35 وطول الفترة ل = 50 ولذلك يكون:

$$ر_1 = 200 + (\frac{41 - 35}{50}) \times 50 = 206$$

وبنفس الطريقة نحسب $ر_3$ حيث:

$$ترتيب\ ر_3 = \frac{3ن}{4} = \frac{164 \times 3}{4} = 123$$

$$\therefore ر_3 = 250 + (\frac{123 - 85}{50}) \times 50 = 282.8$$

وبذلك يكون الانحراف الربيعي = $ر_3$ ـ $ر_1$ = 282.8 ـ 206 = 76.8، ومن هذا المقياس يتضح أن طول الفترة التي تشمل 50% من متوسطي الدخل هو 77 أو يمكننا القول بأن الاختلاف بين 50% من متوسطي الدخل هو حوالي 77.

4 ـ 4 متوسط الانحراف المطلق:

ذكرنا سابقاً بأن التشتت هو عبارة عن اختلاف القيم عن بعضها البعض، فإذا كانت القيم متباعدة عن بعضها كثيراً فإن تشتتها يكون كبيراً، وإذا كانت القيم متقاربة من بعضها كثيراً فإن تشتتها يكون صغيراً، أي أن التشتت هو عبارة عن مقياس لقوة تجمع القيم حول بعضها أي قوة النزعة المركزية، وحيث أن التجمع يكون كما ذكرنا سابقاً حول المتوسط فإذا حسبنا انحرافات القيم عن متوسطها يكون مجموع هذه الانحرافات مقياساً مناسباً لمقدار التشتت. ولكن نحن نعلم من خواص المتوسط الحسابي بأن مجموع الانحرافات عن المتوسط دائماً يساوي الصفر، عليه أخذنا القيمة المطلقة للانحرافات لأن الذي يهمنا في التشتت هو مقدار الانحراف بغض النظر عن إشارته ويكون متوسط مجموع هذه الانحرافات المطلقة مقياساً مناسباً لمقدار التشتت، هذا المقياس أطلق عليه إسم متوسط الانحراف المطلق ويعرف كما يلي:

متوسط الانحراف المطلق = $\frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} |س_ر - \bar{س}|$ حيث ن هي عدد القيم.

ومن الواضح أنه كلما كبرت الانحرافات المطلقة كلما دل ذلك على بعد القيم عن متوسطها، أي كلما كبر التشتت والعكس صحيح.

فإذا حسبنا متوسط الانحراف المطلق لدرجات الطالبين السابق ذكرهما

يكون $\bar{س}_1 = \frac{1}{5}(70 + 98 + 3 + 37 + 52) = \frac{260}{5} = 52$

وعليه يكون متوسط الانحراف المطلق لدرجات الطالب الأول هو:

$$= \frac{1}{5}(|52 - 60| + |52 - 98| + |52 - 3| + |52 - 37| + |52 - 52|)$$

$$= \frac{128}{5} = 25.6$$

أما بالنسبة للطالب الثاني فإنه:

$$\bar{س}_2 = \frac{1}{5}(54 + 50 + 51 + 52 + 53) = \frac{260}{5} = 52$$

وعليه يكون متوسط الانحراف المطلق للطالب الثاني هو:

$$= \frac{1}{5}(|52 - 54| + |52 - 50| + |52 - 51| + |52 - 52| + |52 - 53|)$$

$$= \frac{6}{5} = 1.2$$

ومن ذلك نلاحظ أن درجات الطالب الثاني أقل تشتتاً بكثير من درجات الطالب الأول.

أما إذا كانت البيانات غير مبوبة وبها تكرارات أو البيانات مبوبة في جداول تكرارية ذات فترات يستخدم القانون التالي:

متوسط الانحراف المطلق = $\frac{1}{ن}$ مجـ $ك_ر$ | $س_ر - \bar{س}$ | حيث ن = مجـ $ك_ر$

، $س_ر$ تمثل القيمة (أو مركز الفترة).

ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال 1: الجدول الآتي يبين توزيع درجات 100 طالب في الامتحان النهائي لمادة المحاسبة.

الدرجات	10 ـ	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ 80
عدد الطلاب	5	10	15	20	30	15	5

والمطلوب: إيجاد متوسط الانحراف المطلق لهذا التوزيع.

الحل

أولاً: نوجد المتوسط الحسابي لهذا الجدول بأية طريقة من الطرق السابق ذكرها. ثم نوجد القيمة العددية المطلقة لانحراف القيم عن المتوسط الحسابي $|س_ر - \bar{س}|$ وأخيراً نضرب كل انحراف من هذه الانحرافات في التكرار المناظر له لنحصل على:

$ك_ر$ | ($س_ر - \bar{س}$) | كما بالجدول التالي:

$$\because \bar{س} = \frac{مجـ ك س}{مجـ ك}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{4650}{100} = 46.5$$

الفترات	التكرار ك	مركز الفترة س	$|س - \bar{س}|$ $|ح_ر|$	ك $|س - \bar{س}|$ ك $|ح_ر|$
10 ـ	5	15	31.5	157.5
20 ـ	10	25	21.5	215
30 ـ	15	35	11.5	172.5
40 ـ	20	45	1.5	30
50 ـ	30	55	8.5	255
60 ـ	15	65	18.5	277.5
70 ـ 80	5	75	28.5	142.5
المجموع	100			1250.0

$$\therefore \text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{\text{مجـ ك}\,|(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})|}{\text{مجـ ك}}$$

$$\therefore \text{متوسط الانحراف المطلق} = \frac{1250}{100} = 12.5$$

4 ـ 4 ـ 1 خواص متوسط الانحراف المطلق:

1 ـ يأخذ في الاعتبار جميع المفردات، كما أن قيمته تصغر كلما كبر حجم العينة وهذه الخاصية من خواص المقياس الجيد للتشتت.

2 ـ لا يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة.

3 ـ يصعب حسابه في معظم الأحيان بسبب الكسور الناتجة من حساب انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي لها.

4 ـ غير شائع الاستخدام من قبل الإحصائيين خاصة في مجال الإحصاء الاستنتاجي لاحتواء معادلته على القيمة المطلقة التي يصعب التعامل معها جبرياً.

4 ـ 5 التباين والانحراف المعياري:

لقد اتضح لنا بأن متوسط الانحراف المطلق مقياس مناسب لمقدار التشتت إلا أن وجود القيمة المطلقة يقلل من أهميته الإحصائية. عليه فقد تم معالجة هذه المشكلة بتربيع الانحراف بدلاً من القيمة المطلقة لذلك نحصل على مقياس آخر أكثر استخداماً في القوانين والنظريات الإحصائية، هذا المقياس يسمى بالتباين ويعرف التباين الذي يرمز له بالرمز (ع^2) لمجموعة من القيم بأنه عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، أي أن:

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{مجـ}(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

والجذر التربيعي الموجب للتباين يطلق عليه إسم الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز (ع).

$$\text{حيث ع} = \sqrt{\frac{(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

ملاحظة: إذا كانت البيانات المعطاة متعلقة بعينة فقد وجد إحصائياً أن يقسم على (ن ـ 1) بدلاً من (ن) خاصة إذا كان حجم العينة صغيراً.

مثال 2: أوجد ع^2، ع لمجموعة البيانات التالية 5، 10، 12، 13، 20.

الحل

نوجد أولاً $\bar{\text{س}}$ حيث $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـس}}{\text{ن}} = \frac{20 + 13 + 12 + 10 + 5}{5} = \frac{60}{5} = 12$

$$\because \text{التباين ع}^2 = \frac{\text{مجـ}(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - 1}$$

$$\therefore \text{ع}^2 = \frac{(12-20)^2 + (12-13)^2 + (12-12)^2 + (12-10)^2 + (12-5)^2}{4}$$

$$\therefore \text{ع}^2 = \frac{64+1+0+4+49}{4} = \frac{118}{4} = 29.5$$

ويكون الانحراف المعياري لهذه المجموعة مساوياً لـ:

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ع}^2} = \sqrt{29.5} = 5.43$$

وحساب التباين والانحراف المعياري بهذه الطريقة يحتاج إلى عمليات حسابية كثيرة وخاصة إذا كان عدد القيم كبيراً والمتوسط الحسابي يحتوي على كسور، ولذلك نستخدم صيغة أخرى لإيجاد التباين والانحراف المعياري يمكن اشتقاقها من المعادلة السابقة أو القانون السابق حيث أنها لا تتضمن العمليات الحسابية المعقدة وهي:

$$\because \text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{ن}-1)}\,\text{مجـ}(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2$$

$$= \frac{1}{(\text{ن}-1)}\,\text{مجـ}\left[\text{س}_\text{ر}^2 - 2\text{س}_\text{ر}\bar{\text{س}} + \bar{\text{س}}^2\right]$$

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{ن}-1)}\left[\text{مجـ س}_\text{ر}^2 - 2\bar{\text{س}}\,\text{مجـ س}_\text{ر} + \text{ن}\bar{\text{س}}^2\right]$$

لكن $\bar{س} = \frac{\text{مجـ}\, س}{ن}$

$$\therefore\ ع^2 = \frac{1}{(ن - 1)}\left[\text{مجـ}\, س_ر^2 - 2\left(\frac{\text{مجـ}\, س_ر}{ن}\right)(\text{مجـ}\, س_ر) + \frac{(\text{مجـ}\, س_ر)^2}{ن}\right]$$

$$ع^2 = \frac{1}{(ن - 1)}\left[\text{مجـ}\, س_ر^2 - \frac{(\text{مجـ}\, س_ر)^2}{ن}\right]$$

ويكون الإنحراف المعياري هو:

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\, س^2 - \frac{(\text{مجـ}\, س)^2}{ن}}{(ن - 1)}}$$

وإذا أردنا إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات السابقة باستخدام الصيغ الجديدة نوجد مجـ س، مجـ $س^2$ كما يلي:

$$\text{مجـ}\, س = 5 + 10 + 12 + 13 + 20 = 60$$

$$\text{مجـ}\, س^2 = 25 + 100 + 144 + 169 + 400 = 838$$

$$\therefore\ ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\, س^2 - \frac{(\text{مجـ}\, س)^2}{ن}}{(ن - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{838 - \frac{(60)^2}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{838 - 720}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{118}{4}} = \sqrt{29.5} = 5.43$$

ويكون التباين $ع^2 = ع \times ع = 29.5$

وتستخدم الصيغ السابقة لحساب التباين والانحراف المعياري للبيانات المفردة.

وإذا أردنا تسهيل العمليات الحسابية أكثر من ذلك فإنه يمكن اختيار وسط فرضي من بين القيم ونحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي. فإذا رمزنا لهذا الوسط الفرضي بالرمز (ف) نجد أن التباين:

$$ع^2 = \frac{1}{ن-1}\,\text{مجـ}(س_ر - \bar{س})^2$$

$$= \frac{1}{(ن-1)}\,\text{مجـ}[(س_ر - ف) - (\bar{س} - ف)]^2$$

حيث $(س_ر - ف) = ح_ر$ هو انحرافات القيم عن الوسط الفرضي (ف)، ومن دراستنا للمتوسط الحسابي لاحظنا أن:

$$\bar{س} = ف + \frac{\text{مجـ}\, ح}{ن} = ف + \bar{ح}$$

$$\therefore\ (\bar{س} - ف) = \bar{ح}$$

$$\therefore\ ع^2 = \frac{1}{(ن-1)}\,\text{مجـ}(ح_ر - \bar{ح})^2$$

أي أنه يمكن أن نستبدل قيم (س) بانحرافات هذه القيم عن الوسط الفرضي دون أن يؤثر ذلك على حساب التباين والانحراف المعياري.

فنجد أن $ع^2 = \frac{1}{(ن-1)}\left[\text{مجـ}\, ح^2 - \frac{(\text{مجـ}\, ح)^2}{ن}\right]$

$$ع = \sqrt{\frac{1}{(ن-1)}\left[\text{مجـ}\, ح^2 - \frac{(\text{مجـ}\, ح)^2}{ن}\right]}$$

وتعرف هذه الطريقة بالطريقة المختصرة أو طريقة الانحرافات بينما تعرف الطريقة السابقة بالطريقة المطولة.

ولإيجاد التباين والانحراف المعياري بهذه الطريقة للبيانات السابقة نقوم بالآتي:

بأخذ القيمة 12 كوسط فرضي نجد أن انحرافات القيم عن هذه القيمة هي ‎-7, -2, 0, 1, 8

$\therefore$ مجـ ح = ـ 7 + ـ 2 + 0 + 1 + 8 = ـ 9 + 9 = صفر

مجـ ح² = 49 + 4 + 0 + 1 + 64 = 118

$$\therefore \text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{ن}-1)}\left[\text{مجـ ح}_{\text{ر}}^2 - \frac{(\text{مجـ ح}_{\text{ر}})^2}{\text{ن}}\right] = \frac{1}{4}\left(118 - \frac{(0)^2}{5}\right) = 29.5$$

ويكون الانحراف المعياري $\text{ع} = \sqrt{\text{ع}^2} = \sqrt{29.5} = 5.43$

4 ـ 5 ـ 1 إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة :

في حالة البيانات المبوبة في جداول تكرارية ذات فترات تكون صيغة التباين والانحراف المعياري كما يلي :

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{ن}-1)} \text{ مجـ ك}_{\text{ر}} (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^2$$

حيث مجـ كر = ن = عدد القيم، سر هي مراكز الفترات. ولصعوبة هذه الصيغة من ناحية العمليات الحسابية يمكن تبسيطها ووضعها على الصورة التالية :

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{مجـ ك})-1}\left[\text{مجـ ك س}^2 - \frac{(\text{مجـ ك س})^2}{\text{مجـ ك}}\right]$$

ويكون الانحراف المعياري:

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{1}{(\text{مجـ ك})-1}\left[\text{مجـ ك س}^2 - \frac{(\text{مجـ ك س})^2}{\text{مجـ ك}}\right]}$$

وتعرف هذه الطريقة بالطريقة المطولة.

مثال 3: أوجد التباين والانحراف المعياري للجدول التكراري التالي والخاص بعدد الساعات الأسبوعية التي يحتاجها المنتجون بأحد المصانع لإنجاز عمل معين.

عدد الساعات	30 ـ	34 ـ	38 ـ	42 ـ	46 ـ	50 ـ 54
عدد المنتجين	10	25	30	20	10	5

لحساب التباين والانحراف المعياري نتبع الآتي:

الفترات	التكرار ك	مركز الفترة س	حاصل ضرب ك × س	ك × س²
30 ـ	10	32	320	10240
34 ـ	25	36	900	32400
38 ـ	30	40	1200	48000
42 ـ	20	44	880	38720
46 ـ	10	48	480	23040
50 ـ 54	5	52	260	13520
المجموع	100		4040	165920

$$\text{التباين ع}^2 = \frac{1}{(\text{مجـ ك})-1}\left[\text{مجـ ك س}^2 - \frac{(\text{مجـ ك س})^2}{\text{مجـ ك}}\right]$$

$$= \frac{1}{99}\left[165920 - \frac{(4040)^2}{100}\right]$$

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{99}(163216 - 165920) = \frac{2704}{99} = 27.31$$

ويكون الانحراف المعياري $\text{ع} = \sqrt{27.31} = 5.23$

ولكن هذه الطريقة تحتوي على عمليات حسابية صعبة لذلك يتسحسن

استخدام إما طريقة الانحرافات أو طريقة الانحرافات المختصرة.

أ ـ طريقة الانحرافات:

وهنا يتم اختيار وسط فرضي من بين مراكز الفئات، وتحسب انحرافات القيم عن الوسط الفرضي وتكون صيغة التباين هي:

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{مجـ ك}) - 1}\left[\text{مجـ ك ح}^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح})^2}{\text{مجـ ك}}\right]$$

وصيغة الانحراف المعياري هي:

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{1}{(\text{مجـ ك}) - 1}\left[\text{مجـ ك ح}^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح})^2}{\text{مجـ ك}}\right]}$$

واضح أن هذه الصيغة أفضل وأبسط من الصيغ السابقة، ولذلك يفضل استخدامها دائماً لتبسيط العمليات الحسابية عند إيجاد التباين والانحراف المعياري.

ويمكن إيجاد التباين والانحراف المعياري للجدول التكراري الخاص بعدد ساعات العمل التي يحتاجها المنتجون بأحد المصانع لإنجاز عمل ما بهذه الطريقة كما يلي:

الفترات	التكرار ك	مركز الفترة س	الانحرافات ح	ك × ح	ك × ح^2
30 ـ	10	32	-8	-80	640
34 ـ	25	36	-4	-100	400
38 ـ	30	40	0	00	00
42 ـ	20	44	4	80	320
46 ـ	10	48	8	80	640
50 ـ 54	5	52	12	60	720
المجموع	100		12	40	2720

لقد أخذنا الوسط الفرضي من بين مراكز الفترات وهو = 40 ثم حسبنا الانحرافات كما بالجدول ويكون التباين:

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{مجـ ك}) - 1}\left[\text{مجـ ك ح}^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح})^2}{\text{مجـ ك}}\right]$$

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{99}\left[2720 - \frac{(40)^2}{100}\right]$$

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{99}\left[2720 - 16\right] = \frac{2704}{99} = 27.31$$

ويكون الإنحراف المعياري ع مساوياً لـ:

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ع}^2} = \sqrt{27.31} = 5.2 \text{ ساعة}$$

ب ـ طريقة الانحرافات المختصرة:

وتستخدم هذه الطريقة في حالة التوزيعات التكرارية ذات الفترات المتساوية الطول، وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط الفرضي على طول الفترة (ل) أي أن:

$\text{حَ} = \frac{\text{ح}}{\text{ل}}$ حيث (حَ) هو الانحراف المختصر.

، ل طول الفترة، وتصبح صيغة إيجاد التباين والانحراف المعياري هي:

$$\text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{مجـ ك}) - 1}\left[\text{مجـ ك حَ}^2 - \frac{(\text{مجـ ك حَ})^2}{\text{مجـ ك}}\right] \times \text{ل}^2$$

وكذلك:

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{1}{(\text{مجـ ك}) - 1}\left[\text{مجـ ك حَ}^2 - \frac{(\text{مجـ ك حَ})^2}{\text{مجـ ك}}\right] \times \text{ل}^2}$$

ولإيجاد التباين والانحراف المعياري للمثال السابق بهذه الصيغ الجديدة نتبع الآتي:

الفترات	التكرار ك	مركز الفترة س	الانحرافات ح	الانحرافات المختصرة ح َ	ح َ × ك	ح َ² × ك
30 ـ	10	32	8 ـ	2 ـ	20 ـ	40
34 ـ	25	36	4 ـ	1 ـ	25 ـ	25
38 ـ	30	40	0	0	00	00
42 ـ	20	44	4	1	20	20
46 ـ	10	48	8	2	20	40
50 ـ 54	5	52	12	3	15	45
المجموع	100				10	170

$$\therefore \text{ع}^2 = \frac{1}{(\text{مجـ ك})-1}\left[\text{مجـ ك ح}'^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح}')^2}{\text{مجـ ك}}\right] \times \text{ل}^2$$

$$\therefore \text{ع}^2 = \frac{1}{99}\left[170 - \frac{(10)^2}{100}\right] \times 16$$

$$= \frac{1}{99}\left[170 - 1\right] 16 = 27.31$$

والانحراف المعياري ع $= \sqrt{\text{ع}^2} = \sqrt{27.31} = 5.2$ وهي نفس النتيجة السابقة.

ملاحظة هامة:

1 ـ قيمة التباين والانحراف المعياري دائماً موجبة أي أكبر من أو تساوي الصفر.

2 ـ التباين والانحراف المعياري لا يتأثران بإضافة كمية ثابتة إلى جميع

المفردات أو بطرح كمية ثابتة من جميع المفردات ولكن يتأثران بضرب كمية ثابتة في جميع المفردات أو قسمة جميع المفردات على كمية ثابتة.

4 ـ 5 ـ 2 تصحيح شبرد للتباين والانحراف المعياري المحسوبين من بيانات مبوبة:

عند حسابنا للمتوسط الحسابي والتباين للبيانات المبوبة في جداول تكرارية ذات فترات، فقد افترضنا أن المفردات موزعة بانتظام داخل كل فترة، الأمر الذي دعا إلى استخدام مراكز الفترات لحساب المتوسط الحسابي والتباين، وعلى الرغم من أنّ هذا الفرض يختلف عن الواقع إلا أن الخطأ المترتب عليه لا يكون جسيماً في القيمة المحسوبة للمتوسط الحسابي، ولذلك فإن القيمة المحسوبة للمتوسط الحسابي من البيانات الأصلية مباشرة لا تختلف كثيراً عن القيمة المحسوبة للمتوسط الحسابي بعد تبويب تلك البيانات في جدول توزيع تكراري، والفرق بين قيمتي المتوسط الحسابي يسمى بخطأ التبويت وهذا الخطأ يزداد صغراً كلما صغر طول الفترة (ل)، أما بالنسبة للتباين فإن هذا الخطأ يزداد بسبب تربيع الفروق بين القيم ومتوسطها الحسابي، وعليه فإن التباين والانحراف المعياري المحسوبين من التوزيعات التكرارية يميلان إلى الكبر عن نظيريهما المحسوبين من البيانات المفردة وخاصة إذا زادت الفترات اتساعاً. ولاستبعاد خطأ التبويب من قيمة التباين والانحراف المعياري المحسوبين بإحدى الطرق السابقة وضع شبرد التصحيح التالي:

$$\text{التباين المصحح} = \text{التباين المسحوب} - \frac{\text{ل}^2}{12}$$

أي أن:

$$\text{ع}^2_{\text{المصححة}} = \text{ع}^2 - \frac{\text{ل}^2}{12}$$ حيث (ل) هو طول الفترة

وبتطبيق هذا التصحيح على التباين المحسوب من المثال السابق:

$\therefore$ ع^2 المصححة = $27.31 - \frac{(4)^2}{12} = 25.98$

ويكون الانحراف المعياري المصحح هو:

ع المصححة = $\sqrt{\text{ع}^2 - \frac{\text{ل}^2}{12}}$

$= \sqrt{27.31 - \frac{(4)^2}{12}} = \sqrt{25.98} = 5.1$

بدلاً من القيمة غير المصححة وهي (5.2) ساعة.

ملاحظة:

هذا التصحيح يصلح للاستخدام متى كان التوزيع التكراري متصلاً ويمس المنحنى التكراري له المحور الأفقي من نهايتيه، ولا يصلح هذا التصحيح للتوزيعات الأسية سواء كانت سالبة أو موجبة وكذلك للتوزيعات غير المنتظمة.

4 ـ 5 ـ 3 الخواص العامة للتباين والانحراف المعياري:

1 ـ التباين وكذلك الانحراف المعياري يأخذ في الاعتبار جميع المفردات عند قياس التشتت.

2 ـ يتأثران بالقيم المتطرفة ولا يمكن إيجادهما من الجداول المفتوحة.

3 ـ الانحراف المعياري للعينة يعد أحسن مقدر للانحراف المعياري للمجتمع وذلك لأنه أكثر استقراراً من بقية المقاييس وقيمته لا تختلف كثيراً من عينة إلى أخرى لنفس المجتمع خاصة إذا كان حجم العينة كبيراً.

4 ـ الانحراف المعياري يعتبر من أكثر مقاييس التشتت استخداماً وكذلك يدخل في معظم عمليات الإحصاء الإستنتاجي.

5 ـ الانحراف المعياري يدخل في تركيب معظم المقاييس الإحصائية الهامة مثل مقاييس الارتباط والالتواء والاختلاف النسبي والدرجات المعيارية كما سنرى في البنود القادمة.

4 ـ 5 ـ 4 العلاقة بين مقاييس التشتت:

إذا كان التوزيع التكراري للبيانات متماثلاً أو متواضع الالتواء فإنه توجد علاقة تجريبية تربط بين الانحراف المعياري وبين متوسط الانحرافات المطلقة ونصف الانحراف الربيعي وهي:

1 ـ متوسط الانحرافات المطلقة = $\frac{4}{5}$ الانحراف المعياري.

2 ـ نصف الانحراف الربيعي = $\frac{2}{3}$ الانحراف المعياري.

المدى = 6 (الانحراف المعياري).

وقد تم استنتاج هذه العلاقات التجريبية على أساس بعض خواص التوزيع المعتدل (الطبيعي) (كما سنرى عند دراستنا لهذا التوزيع) لأن متوسط الانحرافات المطلقة ونصف الانحراف الربيعي لهذا التوزيع هما على الترتيب (0.7979)، (0.6745) من انحرافه المعياري. ويمكن الاعتماد على هذه العلاقات عندما يتعذر إيجاد الانحراف المعياري، أي عندما تكون التوزيعات التكرارية مفتوحة فإن الانحراف المعياري يقدر من علاقته بنصف الانحراف الربيعي.

4 ـ 6 معامل الاختلاف:

في بعض الأحيان يرغب الباحث في مقارنة مجموعات مختلفة من البيانات لا من حيث درجة تجانسها المطلقة فقط، ولكن من حيث درجة تجانسها النسبي أيضاً خاصةً حين تختلف متوسطاتها الحسابية. لذلك فإن الاعتماد على الانحراف المعياري في المقارنة في حالات كهذه قد يؤدي إلى نتائج غير صحيحة. وكذلك عندما يقوم الباحث بمقارنة توزيعات تكرارية تختلف وحدات القياس المستعملة. فمثلاً إذا كان الباحث بصدد مقارنة تشتت توزيع أطوال مجموعة من الرجال بتشتت توزيع أوزانهم، فإنه يجد أن وحدات القياس مختلفة وهي السنتيمترات والكيلوجرام، وفي مواقف مثل هذه يمكن التخلص من هذه المشكلة باستخدام مقياس نسبي للتشتت لا يتأثر بوحدات القياس أو مقياس نسبي يكون فيه الانحراف المعياري منسوباً إلى المتوسط الحسابي فإن هذا المقياس النسبي يسمى بمعامل الاختلاف حيث:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$= \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times 100$$

وفي حالة الجداول التكرارية المفتوحة يتعذر إيجاد كل من المتوسط الحسابي وكذلك الانحراف المعياري بدقة.

لذلك تستخدم صيغة أخرى تعتمد على الربعين الأدنى (ر_1) والأعلى (ر_3)

$$\therefore \text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{\text{الربيع الأدنى} + \text{الربيع الأعلى}} \times 100$$

$$= \frac{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}{\text{ر}_3 + \text{ر}_1} \times 100$$

وتستخدم هذه الصيغة أيضاً عندما يراد إيجاد معامل الاختلاف بيانياً.

فإذا أردنا إيجاد معامل الاختلاف لتوزيع عدد الساعات الأسبوعية التي يحتاجها المتجون في أحد المصانع لإنجاز عمل معين نتبع الآتي:

نوجد المتوسط الحسابي س حيث:

$$\bar{\text{س}} = \text{ف} + \left(\frac{\text{مجـ ك ح}'}{\text{مجـ ك}}\right) \times \text{ل}$$

من الجدول السابق نجد أن:

$$\therefore \bar{\text{س}} = 40 + \frac{40}{100} = 40 + 0.4 = 40.4$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{5.2}{40.4} \times 100 = \%12.87$$

وهي عبارة عن نسبة مئوية خالية من وحدات القياس.

مثال 4: إذا كان متوسط درجات مجموعة من الطلاب في أحد المقررات هو 75 بانحراف معياري قدره 15، وكان متوسط درجاتهم في مقرر آخر هو 40 بانحراف معياري 10، فوضح أي الدرجات أكثر اختلافاً؟

الحل

حيث أننا نود مقارنة تشتت ظاهرتين نستخدم لذلك معامل الاختلاف كما يلي:

معامل الاختلاف للمقرر الأول = $\frac{15}{75} \times 100 = 20\%$

معامل الاختلاف للمقرر الثاني = $\frac{10}{40} \times 100 = 25\%$

لذلك يكون الاختلاف في درجات المقرر الثاني أكبر منه في درجات المقرر الأول. ومن الواضح أنه لو اعتمدنا على الانحراف المعياري في المقارنة فقط يكون الاستنتاج بأن الاختلاف في المقرر الأول أكبر من الاختلاف في المقرر الثاني وهذا مخالف للاستنتاج الأول، عليه يجب الاعتماد على معامل الاختلاف في مقارنة التشتت.

4 ـ 7 القيم المعيارية:

إذا كانت لدينا مجموعة من المفردات ثم حسبنا المتوسط الحسابي لها ($\bar{س}$) والانحراف المعياري (ع) ثم طرحنا المتوسط الحسابي من كل مفردة من مفردات المجموعة وقسمنا الناتج على الانحراف المعياري، فإن القيم الجديدة التي نحصل عليها تعرف بالوحدات المعيارية، فإذا رمزنا لها بالرمز (ى) فإن:

$ى_ر = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع}$ حيث المتوسط الحسابي لقيم (ى) يساوي صفراً

والانحراف المعياري لها يساوي الواحد الصحيح ويمكن إثبات ذلك رياضياً.

ملاحظة: الدرجة المعيارية (ى) تعتبر أحد مقاييس الموضع النسبية مثل (المئين الرائي والعشير الرائي... الخ).

مثال 5: إذا كانت س متغيراً عشوائياً له متوسط $\bar{س} = 30$ وانحراف

معياري ع = 5 فأوجد الدرجات المعيارية المناظرة للدرجات الأصلية التالية: 20، 25، 30، 40، 45.

الحل

$$ى_ر = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع} \therefore ى_{20} = \frac{20 - 30}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$ى_{25} = \frac{25 - 30}{5} = -1$$

$$ى_{30} = \frac{30 - 30}{5} = 0$$

$$ى_{40} = \frac{40 - 30}{5} = 2$$

$$ى_{45} = \frac{45 - 30}{5} = 3$$

ويمكن استخدام الدرجات المعيارية في المقارنة بين عنصرين من مجموعتين. فمثلاً في المثال السابق الخاص بدرجات أحد الطلبة في مقررين والتي كانت كما يلي:

درجة الطالب في المقرر الأول 80، درجة الطالب في المقرر الثاني 60 فلا نستطيع القول بأن مستوى الطالب في المقرر الأول أفضل من المقرر الثاني، ولكن لكي تكون المقارنة سليمة يجب النظر إلى مستوى الطالب بالنسبة إلى مجموعته في المقررين، وعليه نحسب الدرجة المعيارية لكل درجة خام فتكون:

الدرجة المعيارية للطالب في المقرر الأول = $\frac{80 - 75}{15} = 0.333$

الدرجة المعيارية للطالب في المقرر الثاني = $\frac{60 - 40}{10} = 2$

ومن ذلك نستنتج أن مستوى الطالب في المقرر الثاني أفضل من مستواه في المقرر الأول بالنسبة إلى كل المجموعة.

4 ـ 8 الالتواء:

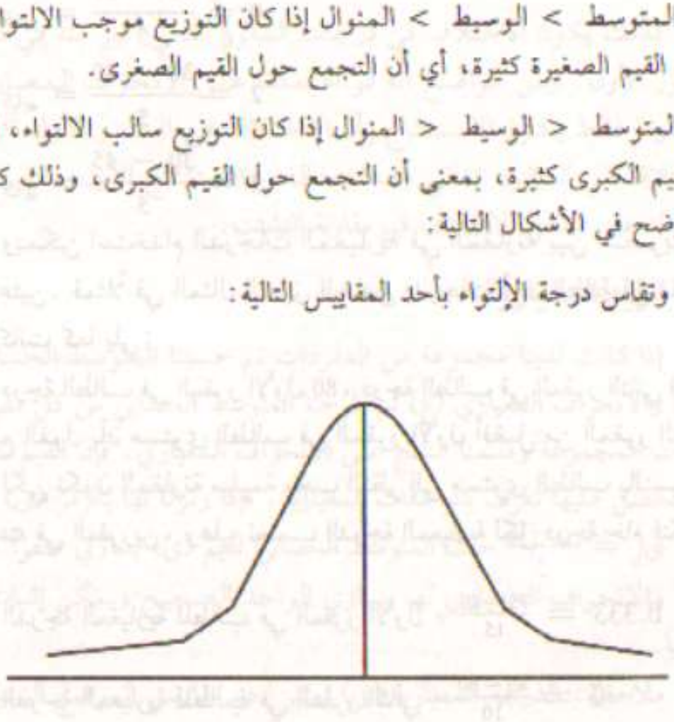
بالإضافة إلى مقاييس النزعة المركزية والتشتت التي تستخدم في وصف البيانات والمقارنة بين الظواهر المختلفة، هناك ظاهرة أخرى سميت بظاهرة الالتواء وهي توضيح للبيانات وحيدة المنوال عما إذا كانت متماثلة التوزيع أم ملتوية ناحية اليمين أو ناحية اليسار. ومن دراستنا للمتوسطات وبعض مقاييس الموضع وشكل التوزيع لاحظنا أنه إذا كان:

أ ـ المتوسط = الوسيط = المنوال إذا كان التوزيع متماثلاً.

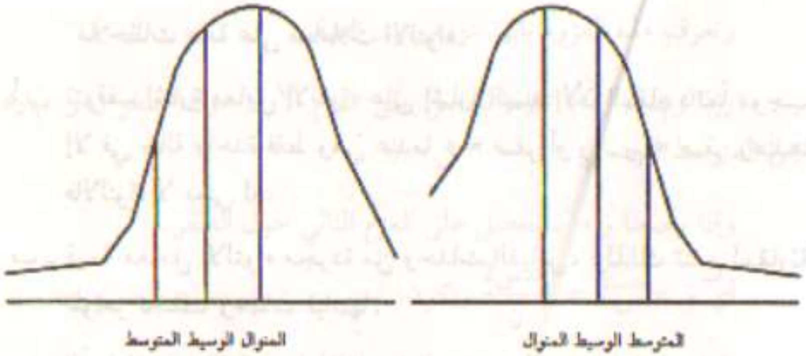
ب ـ المتوسط > الوسيط > المنوال إذا كان التوزيع موجب الالتواء، أي أن القيم الصغيرة كثيرة، أي أن التجمع حول القيم الصغرى.

جـ ـ المتوسط < الوسيط < المنوال إذا كان التوزيع سالب الالتواء، أي أن القيم الكبرى كثيرة، بمعنى أن التجمع حول القيم الكبرى، وذلك كما هو موضح في الأشكال التالية:

وتقاس درجة الإلتواء بأحد المقاييس التالية:



توزيع متماثل: المتوسط = الوسيط = المنوال



توزيع سالب الالتواء   توزيع موجب الالتواء

1 ـ معامل الإلتواء لبيرسون $ت_1 = \frac{\text{المتوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$

$$ت_1 = \frac{\bar{س} - \text{المنوال}}{ع}$$

2 ـ معامل الإلتواء الثاني لبيرسون $ت_2 = \frac{3\,(\text{المتوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$

$$ت_2 = \frac{3\,(\bar{س} - ر_2)}{ع}$$

3 ـ معامل الإلتواء الربيعي $ت_3 = \frac{(ر_3 - ر_2) - (ر_2 - ر_1)}{ر_3 - ر_1}$

وهناك مقياس آخر للالتواء يعتمد على فكرة العزوم سوف نتعرض له فيما بعد.

ملاحظات عامة على معاملات الالتواء:

أ ـ تتوقف إشارة معامل الالتواء على إشارة البسط لأن المقام دائماً موجب إلا في حالة واحدة فقط وهي عندما ع = صفر أو $ر_{ب}$ ـ $ر_{م}$ = صفر وعندها فالالتواء لا معنى له.

ب ـ قيمة معامل الالتواء مجردة من وحدات القياس، ولذلك تنفع لمقارنة ظواهر تختلف وحدات قياسها.

جـ ـ المعاملات $ت_{1}$، $ت_{2}$، $ت_{3}$ قد تختلف قيمها للتوزيع الواحد وذلك بسبب تعريف كل منها، ولذلك يجب الاكتفاء بإيجاد واحد منها فقط مع ملاحظة أنه يتعذر إيجاد $ت_{1}$، $ت_{2}$ بدقة في حالة الجداول المفتوحة للتوزيعات التكرارية.

ولذلك يكون المعامل $ت_{3}$ هو المقياس المناسب في مثل هذه الحالات.

4 ـ 9 العزوم الإحصائية:

يمكن وصف أية عينة إحصائية وصفاً يكاد يكون كاملاً وذلك بحساب ما هو معروف بالعزوم الإحصائية الأربعة الأولى ($م_{1}$، $م_{2}$، $م_{3}$، $م_{4}$).

وهناك نوعان من العزوم: العزوم حول نقطة الأصل والعزوم حول المتوسط.

1 ـ العزوم حول نقطة الأصل (الصفر):

إذا كان $س_{1}$، $س_{2}$، $س_{3}$، .... $س_{ن}$ هي قيم ن وحدة من وحدات المتغير س فإن العزم الرائي لها ويرمز له بالرمز $مَ_{ر}$ ويعرف كما يلي:

$$م'_{ر} = \frac{\text{مجـ}\, س^{ر}}{ن} = \frac{س_{1}^{ر} + س_{2}^{ر} + \dots\dots + س_{ن}^{ر}}{ن} = \overline{س^{ر}}$$

وتعرف هذه العزوم بأنها عزوم حول الصفر.

وإذا وضعنا ر = 1 فإننا نحصل على العزم الأول حول الصفر وهو عبارة عن المتوسط الحسابي.

وإذا وضعنا ر = 2 نحصل على العزم الثاني حول الصفر.

أي $مَ_{2} = \overline{س^{2}} = \frac{\text{مجـ}\,س^{2}}{ن}$ ويكون:

العزم الثاني حول الصفر ـ مربع العزم الأول حول الصفر مساوياً للتباين أي أن:

$$ع^{2} = \frac{\text{مجـ}\,س^{2}}{ن} - \frac{(\text{مجـ}\,س)^{2}}{ن} = م'_{2} - (م'_{1})^{2}$$

مثال 6: أوجد العزوم الثلاثة الأولى حول الصفر لقيم المتغير س التالية: 3، 5، 7، 9

$$مَ_{1} = \text{العزم الأول} = \overline{س} = \frac{3 + 5 + 7 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$مَ_{2} = \text{العزم الثاني} = \overline{س^{2}} = \frac{9 + 25 + 49 + 81}{4} = \frac{164}{4} = 41$$

$$مَ_{3} = \text{العزم الثالث} = \overline{س^{3}} = \frac{(3)^{3} + (5)^{3} + (7)^{3} + (9)^{3}}{4}$$

$$= \frac{27 + 125 + 343 + 729}{4} = \frac{1224}{4}$$

$$= 306$$

2 ـ العزوم حول وسط فرضي (ف):

العزم الرائي حول وسط فرضي (ف) باعتبار نقطة الأصل هي ف هو:

$$\text{م}'_{\text{ر}}(\text{ف}) = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \text{ف})^{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

3 ـ العزوم حول المتوسط الحسابي $(\bar{\text{س}})$:

العزم الرائي حول المتوسط الحسابي $(\bar{\text{س}})$

ويرمز له بالرمز $\text{م}_{\text{ر}}$ هو:

$$\text{م}_{\text{ر}} = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

ومنه نجد أن العزم الأول حول المتوسط الحسابي يساوي صفراً والعزم الثاني حول المتوسط الحسابي يساوي التباين، أي أن:

$$\text{م}_1 = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})}{\text{ن}} = \text{صفر}$$

$$\text{م}_2 = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}} = \text{ع}^2$$

مثال 7: أوجد العزوم الثلاثة الأولى حول المتوسط الحسابي لقيم المتغير س التالية 5، 7، 3، 9.

الحل

أولاً: نوجد المتوسط الحسابي $\bar{\text{س}}$ حيث:

$$\bar{\text{س}} = \frac{5+7+3+9}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\therefore \text{م}_1 = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})}{\text{ن}} = \frac{(5-6)+(7-6)+(3-6)+(9-6)}{4}$$

$$= \frac{-1+1-3+3}{4} = \text{صفر}$$

$$\text{م}_2 = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

$$= \frac{(5-6)^2+(7-6)^2+(3-6)^2+(9-6)^2}{4}$$

$$= \frac{1+1+9+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{م}_3 = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^3}{\text{ن}}$$

$$= \frac{(5-6)^3+(7-6)^3+(3-6)^3+(9-6)^3}{4}$$

$$= \frac{-1+1-27+27}{4} = \text{صفر}$$

4 ـ 9 ـ 1 قياس الالتواء بواسطة العزوم:

لقد عرّفنا الالتواء على أنه بُعد توزيع الظاهرة عن التماثل أي تركز المفردات في أحد جانبي التوزيع على حساب الجانب الآخر. وقد استخدمنا ثلاثة مقاييس للالتواء وهناك مقياس رابع للالتواء يعتمد على العزوم وهو:

$$\text{معامل الالتواء } ت_4 = \frac{م_3}{(م_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{م_3}{(\sqrt{م_2})^3}$$

وقيمة هذا المعامل تساوي صفراً إذا كان التوزيع متماثلاً حيث $م_3$ = صفر وإذا اختلفت قيمة ($ت_4$) عن الصفر فهي إما أن تكون سالبة أو موجبة ويكون الالتواء سالباً في الحالة الأولى وموجباً في الحالة الثانية.

4 ـ 9 ـ 2 العلاقة بين العزوم حول المتوسط الحسابي $م_ر$ والعزوم حول أي وسط فرضي $م_ر$ (ف):

$$م_ر = \frac{1}{ن} مج (س - \bar{س})^ر = \frac{1}{ن} مج [س - ف - (\bar{س} - ف)]^ر$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين نجد أن:

$$م_ر = \frac{1}{ن} مج [(س - ف)^ر - \binom{ر}{1} (س - ف)^{ر-1} (\bar{س} - ف)$$

$$+ \binom{ر}{2} (س - ف)^{ر-2} (\bar{س} - ف)^2$$

$$- \ldots\ldots\ldots (-1)^ر (\bar{س} - ف)^ر]$$

$$م_ر = \frac{1}{ن} مج (س - ف)^ر - \binom{ر}{1} (\bar{س} - ف) \frac{مج (س - ف)^{ر-1}}{ن}$$

$$+ \binom{ر}{2} (\bar{س} - ف)^2 \frac{مج (س - ف)^{ر-2}}{ن} - \ldots\ldots (-1)^ر (\bar{س} - ف)^ر$$

$$\therefore م_ر = م'_ر(ف) - \binom{ر}{1} م'_{ر-1}(ف)\, م'_1(ف) + \binom{ر}{2} م'_{ر-2}(ف)\, م'^2_1(ف) \ldots\ldots (-1)^ر م'^ر_1(ف)$$

لكن $\bar{س} - ف = م'_1(ف)$

وإذا كان ف = 0 فإن

$$م_ر = م'_ر - \binom{ر}{1} م'_{ر-1} م'_1 + \binom{ر}{2} م'_{ر-2} م'^2_1 - \ldots\ldots (-1)^ر م'^ر_1$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

$$م_2 = م'_2 - (م'_1)^2 = م'_2 - م'^2_1$$

$$م_3 = م'_3 - 3 م'_2 م'_1 + 2 م'^3_1$$

$$م_4 = م'_4 - 4 م'_3 م'_1 + 6 م'^2_1 م'_2 - 3 م'^4_1$$

وبصورة عامة يمكن استخدام هذه العلاقة لإيجاد العزوم حول المتوسط بدلالة العزوم حول نقطة الأصل لأية رتبة مطلوبة سواء كانت البيانات مفردة أو مبوبة مع أن العلاقة صحيحة باعتبار نقطة الأصل = الصفر.

ملاحظة: يمكن تقدير العزوم من توزيع تكراري ذي فترات حول أية نقطة (الصفر أو أي وسط فرضي أو المتوسط الحسابي) بنفس الأسلوب السابق مع الأخذ في الاعتبار مراكز الفترات والتكرارات المناظرة باستخدام الصيغ التالية:

العزم الرائي حول الصفر = $م'_ر = \frac{مج\, ك\, س^ر}{مج\, ك}$ حيث س هي مركز الفترة،

$مج\, ك = ن$

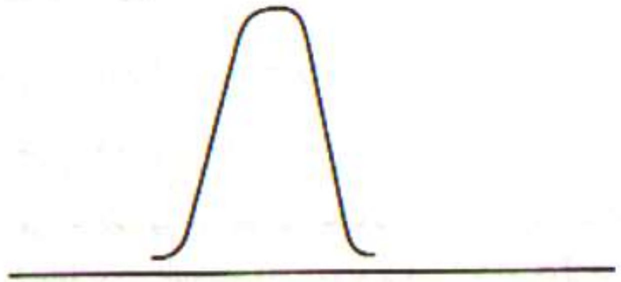
العزم الرائي حول وسط فرضي ف = $\frac{مج\, ك\, (س - ف)^ر}{مج\, ك}$

العزم الرائي حول المتوسط الحسابي $\bar{س}$ = $م_ر = \frac{مج\, ك\, (س - \bar{س})^ر}{مج\, ك}$

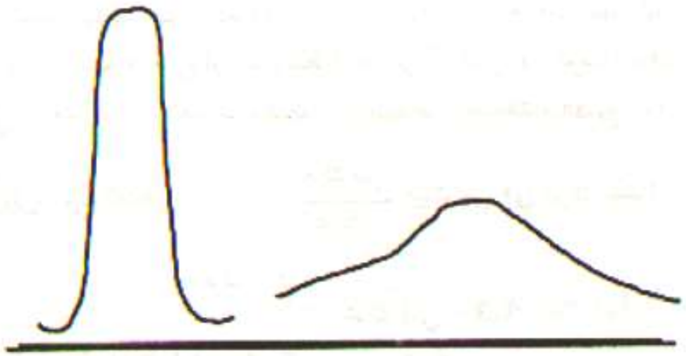
4 ـ 10 التدبب والتفرطح:

ظاهرة التفرطح توضح ما إذا كانت البيانات أكثر تجمعاً في الوسط عنها على الجانبين.

فإذا كانت البيانات أكثر تجمعاً في الوسط (حول المنوال) كان التوزيع مدبباً، وكلما انتشرت البيانات أكثر على الجانبين (أي زادت القيم الكبرى والصغرى) زاد التوزيع تفرطحاً كما هو موضح بالأشكال التالية:



أ ـ منحنى متوسط التفرطح



ب ـ منحنى مفرطح   جـ ـ منحنى مدبب

أشكال منحنيات لتوزيعات تكرارية تختلف في درجة تفرطحها

ويقاس التفرطح باستخدام العزوم بالمقياس التالي:

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{ع_4}{ع_2^2}$$

وهناك مقياس آخر للتفرطح يعتمد على المثينات هو:

$$\text{المعامل المئيني للتفرطح} = \frac{م_{75} - م_{25}}{(م_{90} - م_{10})^2} = \frac{ر_3 - ر_1}{(م_{90} - م_{10})^2}$$

حيث (م) ترمز للمئين حسب الرتبة المذكورة.

مثال 8: الجدول التالي يبين توزيع درجات أعمال السنة لخمسين طالباً في مادة مبادىء إدارة الأعمال.

الدرجات	20 ـ	24 ـ	28 ـ	32 ـ	36 ـ 40
عدد الطلاب	5	10	15	12	8

والمطلوب: إيجاد العزوم الأربعة الأول حول الوسط الفرضي (ف) باعتباره نقطة الأصل ثم إيجاد معاملي الالتواء والتفرطح بالعزوم لهذا التوزيع.

الحل

أولاً: نوجد العزوم الأربعة الأول حول الوسط الفرضى (ف) باستخدام طريقة الانحرافات، ثم نعوض في العلاقة التي تربط بين العزوم حول الوسط الفرضي والعزوم حول المتوسط الحسابي السابق ذكرها.

الفترات	التكرار ك	مركز الفترة س	الانحرافات ح = (س - و)	ك ح	ك ح²	ك ح³	ك ح⁴
20 -	5	22	-8	-40	320	-2560	20480
24 -	10	26	-4	-40	160	-640	2560
28 -	15	30	0	00	00	00	00
32 -	12	34	4	48	192	768	3072
36 - 40	8	38	8	64	512	4096	32768
المجموع	50		00	32	1184	1664	58880

$$\therefore \text{م}'_1(\text{و}) = \frac{\text{مج ك ح}}{\text{مج ك}} = \frac{32}{50} = 0.64$$

$$\text{م}'_2(\text{و}) = \frac{\text{مج ك ح}^2}{\text{مج ك}} = \frac{1184}{50} = 23.68$$

$$\text{م}'_3(\text{و}) = \frac{\text{مج ك ح}^3}{\text{مج ك}} = \frac{1664}{50} = 33.28$$

$$\text{م}'_4(\text{و}) = \frac{\text{مج ك ح}^4}{\text{مج ك}} = \frac{58880}{50} = 1177.6$$

م_1 = صفر مع ملاحظة أن $\bar{\text{س}} = \bar{\text{ح}} + \text{ف} = 0.64 + 30 = 30.64$

$$\text{م}_2 = \text{م}'_2(\text{و}) - \text{م}'^2_1(\text{و}) = 23.68 - (0.64)^2 = 23.27$$

$$\because \text{م}_3 = \text{م}'_3(\text{و}) - 3\text{م}'_2(\text{و})\,\text{م}'_1(\text{و}) + 2\,\text{م}'^3_1(\text{و})$$

$$\therefore \text{م}_3 = 33.28 - 3(0.64)(23.68) + 2(0.64)$$

$$\text{م}_3 = 33.28 - 45.466 + 1.28 = -10.91$$

$$\because \text{م}_4 = \text{م}'_4(\text{و}) - 4\,\text{م}'_3(\text{و})\,\text{م}'_1(\text{و}) + 6\,\text{م}'_2(\text{و})\,\text{م}'^2_1(\text{و}) - 3\,\text{م}'^4_1(\text{و})$$

$$\therefore \text{م}_4 = 1177.6 - 4(0.64)(-10.91) - 3(0.64)^4$$

$$\therefore \text{م}_4 = 1177.6 + 27.9 - 0.5 = 1205$$

$$\because \text{معامل الالتواء ت}_4 = \frac{\text{م}_3}{(\text{م}_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{ت}_4 = \frac{-10.91}{112.25}$$

$$\text{ت}_4 = -0.1$$

وحيث أن معامل الالتواء سالب فيكون التوزيع سالب الالتواء.

$$\text{معامل التفرطح بالعزوم} = \frac{\text{م}_4}{\text{م}_2^2}$$

$$= \frac{1205}{(23.27)^2}$$

$$= 2.23$$

وبذلك يكون التوزيع بسيط التفرطح.

تمارين

1 ـ أوجد المدى لمجموعتي البيانات التالية:

9, 7, 18, 12, 15, 4, 10

5, 8, 20, 9, 9, 6, 3

وبين ما تلاحظه عن تباين المجموعتين.

2 ـ أوجد كلاً من متوسط الانحراف المطلق والانحراف المعياري لكل مجموعة من البيانات التالية:

أ ـ 10, 15, 13, 12, 9, 6, 3

ب ـ 1, 11, 4, 10, 6, 8, 2

3 ـ الجدول التالي يبين توزيع درجات أعمال السنة لخمسين طالباً في إحدى المواد الدراسية:

الدرجات	10 ـ	20 ـ	30 ـ	50 ـ 40
عدد الطلاب	5	15	16	14

والمطلوب:

(أ) إيجاد الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

(ب) حساب معامل الاختلاف لهذا التوزيع.

4 ـ أوجد كلاً من التشتت المطلق والتشتت النسبي للجدول التكراري التالي:

الفترات	10 ـ	20 ـ	30 ـ	50 ـ 40
التكرار	10	18	14	8

وذلك باستخدام: أولاً الطريقة الحسابية

ثانياً الطريقة البيانية

5 ـ أوجد متوسط الانحراف المطلق والعزوم الأربعة الأولى حول المتوسط الحسابي لمجموعة البيانات التالية: 12 ,6 ,3 ,7 ,10 ,15.

6 ـ الجدول التالي يبين توزيع الدرجات التي تحصل عليها 100 طالب في الامتحان النهائي لمادة المحاسبة:

الدرجات	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	80 ـ 70
عدد الطلاب	8	22	30	20	15	5

أوجد كلاً من الوسيط والربيعين الأول والثالث بيانياً ثم حقق ذلك حسابياً، ثم استخدم هذه النتائج في قياس التواء هذا التوزيع واختلافه النسبي.

7 ـ إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من البيانات عددها 10 مفردات يساوي 2 وكان مجموع مربعاتها يساوي 90 فأوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات هذه وأوجد قيمة التباين إذا حسبت القيمة 2 بدلاً من القيمة 3 عن طريق الخطأ.

8 ـ إذا كان درجة الطالب (أ) في مادة الرياضة البحتة هي 60 وكانت درجته في مادة المحاسبة هي 70، فإذا علم أن متوسط درجة امتحان الرياضة للمجموعة كلها هو 65 بانحراف معياري قدره 5 درجات ومتوسط درجة امتحان المحاسبة للمجموعة كلها هو 80 بانحراف معياري قدره 8 درجات؛ فبين في أي من هاتين المادتين يعتبر مستوى هذا الطالب أفضل نسبة إلى المجموعة كلها.

9 ـ الجدول التالي يبين عدد الساعات الأسبوعية التي يشتغلها المُنتجون بأحد المصانع:

عدد الساعات	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ 80
عدد المنتجين	5	15	25	30	15	10

والمطلوب إيجاد كل مما يأتي:

1 ـ معامل الالتواء لهذا التوزيع بطريقتين مختلفتين.

2 ـ معامل التفرطح لهذا التوزيع بطريقتين مختلفتين.

10 ـ أذكر مثالاً واقعياً في مجال التخصص للحالات الآتية:

أ ـ الانحراف المعياري لبيانات تساوي صفراً.

ب ـ المدى لظاهرة أكبر من ظاهرة أخرى.

جـ ـ معامل اختلاف لبيانات مساوياً الصفر.

11 ـ إذا علمت بأن معامل الالتواء لإنتاج أحد المصانع السنة الماضية كان ـ 10 بانحراف معياري 10، وإذا كان متوسط الإنتاج 150 وحدة، فما قيمة المنوال؟ وماذا تفهم عن إنتاج هذا المصنع؟

12 ـ هل تعتقد بأن معامل الاختلاف يكون أكبر من 100%، إشرح إجابتك.

13 ـ إذا كان متوسط وتباين زمن إنجاز عمل ما من قبل شخصين كما يلي:

الشخص	المتوسط	التباين
الأول	60	144
الثاني	25	16

أيهما أكثر تجانساً في إنجاز العمل وأيهما في نظرك أسرع، ولماذا؟ وإذا اشترك الشخص الأول في دورة فأصبح متوسطه 40 فهل يؤثر ذلك على المقارنة السابقة؟

14 ـ إذا علمت بأن معامل الاختلاف لدرجات مجموعة من الطلبة في اختبار لمقرر الإحصاء هو 10% بانحراف معياري 7، فإذا كان مجموع درجاتهم هو 7000 فما هو عددهم؟

15 ـ المعلومات الآتية توضح بيانات عن مجموعتين:

مج (س ـ 5) = 3، مج (س ـ 5)^2 = 43، ن$_1$ = 18

مج (ص ـ 8) = ـ 11، مج (ص ـ 8)^2 = 76، ن$_2$ = 17

فاحسب متوسط وتباين المجموعة المعلومة من دمج المجموعتين معاً.

16 ـ إذا علمت بأن متوسط 150 عدد هو 10 بانحراف معياري 4 فإذا كان متوسط 50 منهم هو 7 بانحراف معياري 3 فما هو متوسط وتباين المئة عدد الباقية؟

17 ـ إذا علمت بأن التباين لمجموعة من الأعداد كان صفراً، فما قيمة المدى، ؟ولماذا؟

18 ـ إذا كان معامل التفرطح لدرجات مجموعة الطلبة في مادة المحاسبة هو 10 ومعامل التفرطح لدرجات مادة الرياضيات هو 6.. إشرح ماذا تفهم من توزيع درجات هؤلاء الطلبة في المادتين علماً بأن المنوال للمادتين كان 62.

19 ـ أذكر مثالاً لبيانات واقعية يكون معامل التوائها سالباً وآخر يكون معامل التوائها موجباً.

20 ـ إحسب قيمة الانحراف المعياري للعددين أ، ب وما علاقته بالمدى.

21 ـ أوجد المقياس المناسب لتشتت الظاهرة التالية:

كمية الإنتاج	100 ـ 150	150 ـ 200	200 ـ 250	250 ـ 300	300 فأكثر
العدد	60	180	210	52	18

22 ـ البيانات التالية توضح توزيع عدد أيام الغياب لمجموعتين من الطلبة فوضح أي من المجموعتين أكثر انتظاماً في الحضور وأيهما أكثر غياباً؟

أيام الغياب	0 ـ 2	3 ـ 5	6 ـ 8	9 ـ 11	12 ـ 14
عدد طلبة المجموعة 1	52	16	10	6	4
عدد طلبة المجموعة 2	30	26	20	15	10

23 ـ البيانات التالية توضح بعض المقاييس لتوزيع درجات مجموعة من الطلبة في مقررين. إشرح ماذا تفهم من هذه المقاييس؟

المجموعة	المتوسط	التباين	المنوال	معامل التفرطح
1	66	10	78	8
2	58	4	66	4

حل تمارين الباب الرابع

1 ـ المدى للمجموعة الأولى = أكبر قيمة ـ أصغر قيمة =

$= 18 - 4 = 14$

المدى للمجموعة الثانية $= 20 - 3 = 17$

المجموعة الثانية أكثر تبايناً من المجموعة الأولى.

2 ـ متوسط الانحراف المطلق $= \frac{1}{ن} \text{مجـ} |س_ر - \bar{س}|$

الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{1}{ن-1}\left[\text{مجـ}\, س_ر^2 - \frac{(\text{مجـ}\, س_ر)^2}{ن}\right]}$

أ ـ مجـ س = 68، $\bar{س} = \frac{68}{7} = 9.7$، مجـ $س^2 = 764$

∴ متوسط الانحراف المطلق $= \frac{1}{7}\left[|3 - 9.7| + |6 - 9.7| + |9 - 9.7|\right.$

$\left. + |12 - 9.7| + |13 - 9.7| + |15 - 9.7| + |10 - 9.7|\right]$

$= \frac{22.7}{7} = 3.19$

الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{1}{6}\left[764 - \frac{(68)^2}{7}\right]}$

$= \sqrt{17.24} = 4.15$

ب ـ مجـ س = 42، $\bar{س} = \frac{42}{7} = 6$، مجـ $س^2 = 342$

متوسط الانحراف المطلق =

$\frac{1}{7}\left[|2 - 6| + |8 - 6| + |8 - 6| + ... + |1 - 6|\right]$

$$= \frac{22}{7} = 3.14$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{1}{6}\left[342 - \frac{(42)^2}{7}\right]} = 3.87$$

3 ـ أ ـ لحساب الانحراف المعياري نكون الجدول التالي:

الدرجة	10 ـ	20 ـ	30 ـ	40 ـ 50	المجموع
العدد	5	15	16	14	50
المركز س	15	25	35	45	
ك س	75	375	560	630	1640
$س^2$	225	625	1225	2025	
$ك\,س^2$	1125	9375	19600	28350	58450

$$\therefore \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{1}{ن-1}\left[\text{مجـ}\,ك\,س^2 - \frac{(\text{مجـ}\,ك\,س)^2}{ن}\right]}$$

$$\therefore ع = \sqrt{\frac{1}{49}\left[58450 - \frac{(1640)^2}{50}\right]} = 9.75$$

ب ـ $\text{معامل الاختلاف} = \frac{ع}{\bar{س}} \times 100$

$$= \frac{9.75}{\frac{1640}{50}} \times 100 = 29.72\%$$

4 ـ لحساب المطلوب نكون الجدول التالي:

الفترة	10 ـ	20 ـ	30 ـ	40 ـ 50	المجموع
التكرار ك	10	18	14	8	50
المركز س	15	25	35	45	ـ
$ح' = \frac{س - 35}{10}$	2 ـ	1 ـ	0	1	
ك ح'	20 ـ	18 ـ	0	8	30 ـ
$ح'^2$	4	1	0	1	ـ
$ك\,ح'^2$	40	18	0	8	66
ت. م. ص	10	28	42	50	

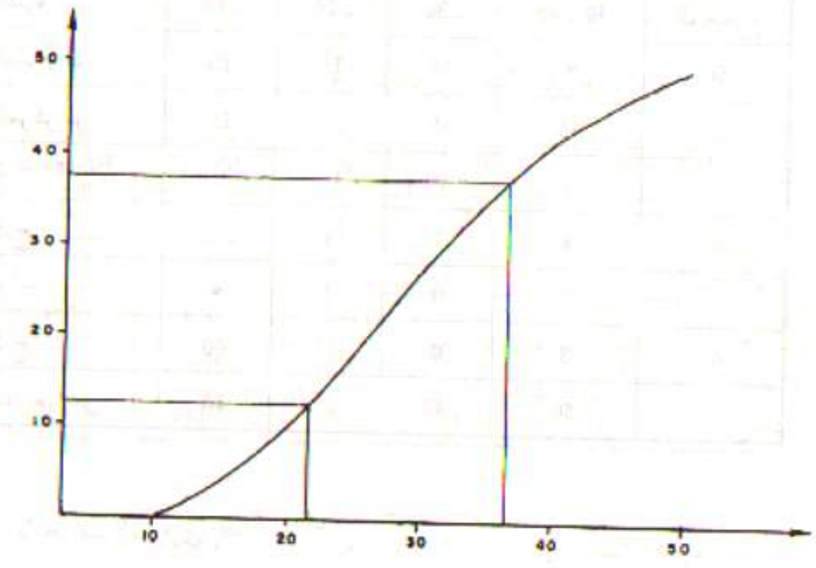
الانحراف المعياري =

$$\sqrt{\frac{1}{ن-1}\left[\text{مجـ}\,ك\,ح'^2 - \frac{(\text{مجـ}\,ك\,ح')^2}{ن}\right]ل^2} = \sqrt{\frac{1}{49}\left[66 - \frac{(-30)^2}{50}\right]} \times 10^2 = 9.9$$

$$\bar{س} = \bar{ح'} \times 10 + 35 = -\frac{30}{50} \times 10 + 35 = 29$$

التشتت المطلق ع = 9.9

$$\text{التشتت النسبي} = \text{معامل الاختلاف} = \frac{ع}{\bar{س}} \times 100 = \frac{9.9}{29} \times 100 = 34.1\%$$



الاختلاف النسبي = $\frac{ر_3 - ر_1}{ر_3 + ر_1} \times 100$

$= \frac{36.6 - 21.5}{36.6 + 21.5} \times 100 = 26\%$

5 ـ

	س	$\|س - \bar{س}\|$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^3$	$(س - \bar{س})^4$
	12	3.2	10.24	32.768	104.858
	6	2.8	7.84	-21.952	61.466
	3	5.8	33.64	-195.112	1131.65
	7	1.8	3.24	-5.832	10.5
	10	1.2	1.44	1.728	2.074
	15	6.2	38.44	238.328	1477.634
المجموع	53	21	94.84	49.928	2788.178

$\bar{س} = \frac{53}{6} = 8.8$

∴ متوسط الانحراف المطلق = $\frac{مجـ|س - \bar{س}|}{ن} = \frac{21}{6} = 3.5$

$م_1 = 0$

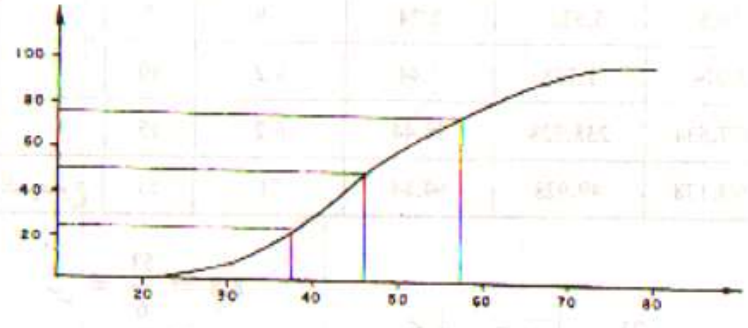
$م_2 = \frac{مجـ(س_ر - \bar{س})^2}{ن} = \frac{94.84}{6} = 15.8$

$م_3 = \frac{مجـ(س - \bar{س})^3}{ن} = \frac{49.928}{6} = 8.32$

$م_4 = \frac{مجـ(س - \bar{س})^4}{ن} = \frac{2788.178}{6} = 464.7$

6 ـ

الدرجة	20 ـ	30 ـ	40 ـ	50 ـ	60 ـ	70 ـ 80
العدد	8	22	30	20	15	5
ت. م. ص	8	30	60	80	95	100



$\text{الوسيط} = \text{ح}_1 + \frac{(\frac{\text{ن}}{2} - \text{حـ})\text{ل}}{\text{ك}}$

$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{ن}}{2} = 50$

$\therefore \text{الوسيط} = 40 + \frac{10(30 - 50)}{30} = 46.67$

$\text{رتبة الربيع الأول} = \frac{\text{ن}}{4} = 25$

$\therefore \text{ر}_1 = \text{ح}_1 + \frac{(\frac{\text{ن}}{4} - \text{حـ})\text{ل}}{\text{ك}} = 30 + \frac{10(8 - 25)}{22} = 37.73$

$\text{رتبة الربيع الثالث} = \frac{3 \times \text{ن}}{4} = 75$

$\therefore \text{ر}_3 = \text{ح}_1 + \frac{(3 \times \frac{\text{ن}}{4} - \text{حـ})\text{ل}}{\text{ك}} = 50 + \frac{10(60 - 75)}{20} = 57.5$

من الرسم نجد أن الوسيط = 46.6

$\text{ر}_1 = 37.7$

$\text{ر}_3 = 57.5$

معامل الاختلاف الربيعي =

$\frac{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}{\text{ر}_3 + \text{ر}_1} \times 100 = \frac{37.7 - 57.5}{37.7 + 57.5} \times 100 = 20.8\%$

معامل الالتواء الربيعي =

$\frac{(\text{ر}_3 - \text{ر}_2) - (\text{ر}_2 - \text{ر}_1)}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1} = \frac{37.7 + 46.7 \times 2 - 57.5}{37.7 - 57.5} = 0.09$

7 ـ ن = 10، $\bar{\text{س}} = 2$، مجـ $\text{س}^2 = 90$

$\text{ع}^2 = \frac{1}{\text{ن} - 1}\left[\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}\right]$

$= \frac{1}{9}\left[90 - \frac{(20)^2}{10}\right] = 5.56$

$\therefore \text{ع} = 2.36$

مجـ س الصحيحة = 20 − 2 + 3 = 21

مجـ س^2 الصحيحة = 90 − 4 + 9 = 95

$\therefore \text{التباين الصحيح} = \frac{1}{9}\left[95 - \frac{(21)^2}{10}\right] = 5.66$

8 ـ لمقارنة مستوى الطالب في المادتين نسبة إلى المجموعة كلها نستخدم الدرجة المعيارية كما يلي:

$$\text{ى} = \frac{\text{س} - \overline{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$\text{ى}_{\text{الرياضيات}} = \frac{65 - 60}{5} = -1$$

$$\text{ى}_{\text{المحاسبة}} = \frac{80 - 70}{8} = -1.25$$

بذلك يتضح أن مستوى الطالب في الرياضيات أفضل منه في المحاسبة بالنسبة إلى المجموعة كلها.

9 ـ

الفترة	التكرار	ت. م. ص	المركز س	الانحرافات ح = س ـ 45	ك ح	ك ح²	ك ح³	ك ح⁴
20 ـ	5	5	25	20 ـ	100 ـ	2000	40000 ـ	800000
30 ـ	15	20	35	10 ـ	150 ـ	1500	15000 ـ	150000
40 ـ	25	45	45	0	0	0	0	0
50 ـ	30	75	55	10	300	3000	30000	300000
60 ـ	15	90	65	20	300	6000	120000	2400000
70 ـ 80	10	100	75	30	300	9000	270000	8100000
المجموع	100				650	21500	365000	11750000

$$\overline{\text{س}} = \overline{\text{ح}} + 45 = \frac{650}{100} + 45 = 51.5$$

$$\text{المنوال} = \text{ح}_\text{د} + \frac{\text{ف}_1 \text{ل}}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2}$$

$$\text{ف}_1 = 30 - 25 = 5 \text{،} \quad \text{ف}_2 = 30 - 15 = 15$$

$$\text{المنوال} = 50 + \frac{10 \times 5}{20} = 52.5$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{1}{\text{ن} - 1}\left[\text{مجـ ك ح}^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح})^2}{\text{ن}}\right]} = \sqrt{\frac{1}{99}\left[21500 - \frac{(650)^2}{100}\right]} = 13.21$$

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{ن}}{2} = 50 \text{، الوسيط} = 50 + \frac{10(45 - 50)}{30} = 51.67$$

$$\text{رتبة ر}_1 = \frac{\text{ن}}{4} = 25$$

$$\text{ر}_1 = 40 + \frac{10(20 - 25)}{25} = 42$$

$$\text{رتبة ر}_3 = \frac{\text{ن}}{4} \times 3 = 75$$

$$\text{ر}_3 = 50 + \frac{10(45 - 75)}{30} = 60$$

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{المتوسط - المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{52.5 - 51.5}{13.21} = -0.076$$

$$\text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{\text{ر}_3 - 2\text{ر}_2 + \text{ر}_1}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1} = \frac{42 + 51.67 \times 2 - 60}{42 - 60} = -0.074$$

$$\text{م}'_1(\text{ف}) = \frac{650}{100} = 6.5 \qquad \text{م}'_2(\text{ف}) = \frac{21500}{100} = 215$$

$$\text{م}'_3(\text{ف}) = \frac{365000}{100} = 3650 \qquad \text{م}'_4(\text{ف}) = \frac{11750000}{100} = 117500$$

$$\text{م}_2 = \text{م}'_2(\text{ف}) - \text{م}'^2_1(\text{ف}) = 215 - (6.5)^2 = 172.75$$

$$\text{م}_4 = \text{م}'_4(\text{ف}) - 4\text{م}'_3(\text{ف})\text{م}'_1(\text{ف}) + 6\text{م}'_2(\text{ف})\text{م}'^2_1(\text{ف}) - 3\text{م}'^4_1(\text{ف})$$

$$= 117500 - 4 \times 3650 \times 6.5 + 6 \times 215 \times 6.5^{2} - 3 \times (6.5)^{4} = 71747.32$$

رتبة $م_{90}$ $= \frac{ن \times 90}{100} = 90$

$م_{90} = 60 + \frac{10(75 - 90)}{15} = 70$

رتبة $م_{10}$ $= \frac{ن \times 10}{100} = 10$

$م_{10} = 30 + \frac{10(5 - 10)}{15} = 33.3$

معالم التفرطح $= \frac{م_4}{م_2^2} = \frac{71747.32}{29842.56} = 2.4$

معالم التفرطح المئيني $= \frac{ر_3 - ر_1}{(م_{90} - م_{10})^2} = \frac{60 - 42}{(70 - 33.3)^2} = 0.013$

10 ـ أ ـ مرتبات مجموعة من المحاسبين في نفس الظروف.

ب ـ زمن إنجاز مجموعة من الأعمال المتشابهة ومجموعة أخرى من الأعمال المختلفة.

جـ ـ لكي يكون معامل الاختلاف مساوياً الصفر يجب أن يكون الانحراف المعياري مساوياً الصفر، مثل العلاوة السنوية لمجموعة من المحاسبين في نفس الدرجة.

11 ـ معامل الاختلاف $= \frac{\text{المتوسط - المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$

$- 10 = \frac{150 - \text{المنوال}}{10}$

∴ المنوال = 250

∵ المنوال > المتوسط

هذا يدل على أن الإنتاج في الغالب كثير.

12 ـ يمكن أن يكون معامل الاختلاف أكبر من 100% عندما تكون لدينا معطيات غالبيتها قيم صغيرة مثل:

س	0	1	2	3	
ك	5	1	1	1	8
ك س	0	1	2	3	6
ك $س^2$	0	1	4	9	14

∴ $ع^2 = \frac{1}{7}\left[14 - \frac{36}{8}\right] = 1.36$

$ع = 1.16$

$\bar{س} = \frac{6}{8} = .75$

∴ معامل الاختلاف $= \frac{1.16}{.75} \times 100 = 154.7\%$

13 ـ لمقارنة التجانس نستخدم معامل الاختلاف:

معامل الاختلاف للأول $= \frac{ع}{\bar{س}} \times 100 = \frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

معامل الاختلاف للثاني = $\frac{4}{25} \times 100 = 16\%$

∴ الثاني أكثر تجانساً لأن معامل الاختلاف أقل من الأول وكذلك للثاني أسرع في إنجاز أعماله لأن متوسطه أقل.

معامل اختلاف الأول بعد الدورة = $\frac{12}{40} \times 100 = 30\%$

هذا التغير لا يؤثر على المقارنة السابقة.

14 ـ معامل الاختلاف = $\frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times 100$

$$10 = \frac{7}{\bar{\text{س}}} \times 100$$

$$\therefore \bar{\text{س}} = 70$$

$$70 = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{7000}{\text{ن}}$$

∴ ن = 100

15 ـ مجـ (س − 5) = 3 ∴ مجـ س = 18 × 5 + 3 = 93

مجـ $(\text{س}^2 - 10\,\text{س} + 25) = 43$ ∴ مجـ $\text{س}^2 - 10 \times 93 + 18 \times 25 = 43$

∴ مجـ $\text{س}^2 = 523$

مجـ (ص − 8) = −11، ∴ مجـ ص = 17 × 8 − 11 = 125

مجـ $(\text{ص}^2 - 16\text{ص} + 64) = 76$

∴ مجـ $\text{ص}^2 - 16 \times 125 + 17 \times 64 = 76$

مجـ $\text{ص}^2 = 988$

∴ المتوسط بعد الدمج $= \frac{\text{مجـس} + \text{مجـص}}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} = \frac{93 + 125}{18 + 17} = 6.2$

مجموع مربعات القيم بعد الدمج = مجـ س^2 + مجـ $\text{ص}^2 = 523 + 988 = 1511$

∴ التباين بعد الدمج $= \frac{1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 - 1}\left[\text{مجـس}^2 + \text{مجـص}^2 - \frac{(\text{مجـس} + \text{مجـص})^2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}\right]$

$$= \frac{1}{34}\left[1511 - \frac{(218)^2}{35}\right] = 4.5$$

16 ـ $\bar{\text{س}}_{150} = 10$، ن = 150، $\text{ع}_{150} = 4$

$\bar{\text{س}}_{50} = 7$، $\text{ن}_1 = 50$، $\text{ع}_{50} = 3$

∴ $\text{مجـ}_1^{150}\,\text{س} = 10 \times 150 = 1500$

$\text{مجـ}_1^{50}\,\text{س} = 7 \times 50 = 350$

∴ مجموع المئة عدد الباقية = 1500 ـ 350 = 1150

∴ المتوسط للمئة عدد = $\frac{1150}{100} = 11.5$

لحساب تباين المئة عدد الباقية نحسب مجموع مربعاتها كما يلي:

$$\text{ع}^2_{150} = 16 = \frac{1}{149}\left[\text{مجـ س}^2 - \frac{(1500)^2}{150}\right]$$

∴ مجـ س^2 = مجموع مربعات المئة وخمسين عدداً

$= 16 \times 149 + 15000 = 17384$

$$\text{ع}^2_{50} = 9 = \frac{1}{49}\left[\text{مجـ س}^2 - \frac{(350)^2}{50}\right]$$

∴ مجموع مربعات الخمسين عدد = $\sum^{50}$س^2 = 9 × 49 + 2450 = 2891

∴ مجموع مربعات المئة عدد الباقية = 17384 − 2891 = 14493

$$\therefore \text{تباين المئة عدد الباقية} = \frac{1}{99}\left[14493 - \frac{(1150)^2}{100}\right]$$

$$= 12.81$$

17 ـ ∵ التباين = صفر. هذا يدل على أن جميع القيم متساوية عليه يكون المدى = 0.

18 ـ نفهم من ذلك بأن درجات الطلبة في مادة المحاسبة الكثير منها موزع حول 62 أكثر من مادة الرياضيات، وأن عدد الطلبة الذين درجاتهم عالية جداً والذين درجاتهم صغيرة جداً في مقرر الرياضيات أكثر من مادة المحاسبة لأن منحنى درجات المحاسبة أكثر تدبباً من منحنى مادة الرياضيات.

19 ـ يكون معامل الالتواء سالباً إذا كان المنوال من القيم الكبيرة، مثل درجات مجموعة من الطلبة في مقرر المحاسبة غالبيتهم ممتازين والعكس إذا كان معامل الالتواء موجباً يكون المنوال من القيم الصغيرة مثل درجات الحرارة في فصل الشتاء.

20 ـ ع^2 = التباين = $\left[\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \frac{(\text{أ}+\text{ب})^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[2\text{أ}^2 + 2\text{ب}^2 - \text{أ}^2 - 2\text{أب} - \text{ب}^2\right]$

$$= \frac{1}{2}(\text{أ} - \text{ب})^2$$

المدى = |أ ـ ب|

$$\text{ع} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\text{أ} - \text{ب}|$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{المدى} = 0.71\ \text{المدى}$$

21 ـ المقياس المناسب لتشتت الظاهرة هو الانحراف الربيعي لأن الجدول مفتوح ويتم حسابه كما يلي:

كمية الإنتاج	100 ـ 150	150 ـ 200	200 ـ 250	250 ـ 300	300 فأكثر
العدد	60	180	210	52	18
ت. م. ص	60	240	450	502	520

الانحراف الربيعي = ر$_3$ ـ ر$_1$

$$\therefore \text{رتبة ر}_1 = \frac{\text{ن}}{4} \times 1 = \frac{520}{4} = 130$$

$$\text{ر}_1 = \text{ح}_1 + \frac{(\frac{\text{ن}}{4} - \text{ح})\text{ل}}{\text{ك}}$$

$$= 150 + \frac{(130 - 60) \times 50}{180} = 169.4$$

$$\text{رتبة ر}_3 = \frac{\text{ن}}{4} \times 3 = 390$$

$$\text{ر}_3 = \text{ح}_3 + \frac{(\frac{\text{ن}}{4} \times 3 - \text{ح})\text{ل}}{\text{ك}}$$

$$= 200 + \frac{50(390 - 240)}{210} = 235.7$$

∴ الانحراف الربيعي = 235.7 ـ 169.4 = 66.3

أو نصف الانحراف الربيعي = 33.15

22 ـ لمقارنة انتظام المجموعتين نستخدم معامل الاختلاف كما يلي:

أيام الغياب	0 ـ 2	3 ـ 5	6 ـ 8	9 ـ 11	12 ـ 14	المجموع
عدد طلبة المجموعة 1	52	16	10	6	4	88
عدد طلبة المجموعة 2	30	26	20	15	10	101
المركز س	1	4	7	10	13	
$ك_1$ س	52	64	70	60	52	298
$ك_2$ س	30	104	140	150	130	554
$س^2$	1	16	49	100	169	
$ك_1 س^2$	52	256	490	600	676	2074
$ك_2 س^2$	30	416	9800	1500	1690	13436

$$\bar{س}_1 = \frac{\text{مجـ}\,ك_1 س}{\text{مجـ}\,ك_1} = \frac{298}{88} = 3.39$$

$$\bar{س}_2 = \frac{\text{مجـ}\,ك_2 س}{\text{مجـ}\,ك_2} = \frac{554}{101} = 5.49$$

$$ع = \sqrt{\frac{1}{87}\left[2074 - \frac{(298)^2}{88}\right]} = 3.5$$

$$ع_2 = \sqrt{\frac{1}{100}\left[13436 - \frac{(554)^2}{101}\right]} = 10.2$$

∴ معامل الاختلاف للمجموعة 1 = $\frac{3.5}{3.39} \times 100 = 103.2\%$

معامل الاختلاف للمجموعة 2 = $\frac{10.2}{5.49} \times 100 = 185.8\%$

المجموعة الأولى أكثر انتظاماً والثانية أكثر غياباً.

23 ـ تدل المعلومات على أن غالبية المجموعة الأولى درجاتهم 78 أما الثانية فغالبية درجاتهم 66، وأن تجمع درجات المجموعة الأولى حول الدرجة 78 أكثر من تجمع درجات المجموعة الثانية حول 66، كذلك فإن الاختلاف في درجات المجموعة الأولى أكثر من المجموعة الثانية، كما أن متوسط المجموعة الأولى أكبر من متوسط المجموعة الثانية.

5 ـ الارتباط

5 ـ 1 مقدمة:

شرحنا في المواضيع السابقة وصف الظواهر ذات الصفة الواحدة أي المتغير الواحد وذلك باستخدام عدة طرق من جوانب مختلفة. ولكن في الواقع نجد أن معظم الظواهر التي حولنا تؤثر وتتأثر ببعضها البعض مما يدل على وجود علاقة بينها تختلف من حيث الشكل والقوة باختلاف هذه الظواهر، وحيث أن اهتمامنا في هذا المقرر هو وصف البيانات المعبرة عن هذه الظواهر، عليه سوف يكون الوصف شاملاً وأكثر واقعية لو أمكننا وصف شكل العلاقة بين الظواهر التي نود دراستها ومدى تأثيرها على بعضها. ولقد وجد الإحصائيون موضوعين يبحثان في مثل هذه الدراسات سمى الموضوع الذي يبحث في قوة العلاقة واتجاهها بين الظواهر بالارتباط، وسمى الموضوع الذي يبحث في شكل ونوع العلاقة بالانحدار. وسوف نتعرض في هذا الباب إلى موضوع الارتباط وندرس في الباب التالي موضوع الانحدار.

5 ـ 2 الارتباط البسيط:

الارتباط كما ذكرنا يبحث في قوة العلاقة بين ظاهرتين أو أكثر وأبسط أنواعه الارتباط البسيط الذي يبحث في قوة العلاقة بين ظاهرتين؛ فهو يدل على أنه إذا تغير أحد المتغيرين بالزيادة أو النقص يصاحبه تغيير في المتغير الآخر، فإذا تغير الأول بالزيادة صاحبه تغيير في الثاني بالزيادة. يقال إن الارتباط بينهما طردي أو موجب (ومن الواضح أن نفس المفهوم ينطبق في

حالة النقص في المتغير الأول صاحبه نقص في المتغير الثاني). أما إذا تغير الأول بالزيادة صاحبه تغير في الثاني بالنقص يقال إن الارتباط بينهما عكسي (سالب)، ومما يجدر بالإشارة إليه أن الارتباط يهتم بالحالة العامة أي الصورة العامة لتغير الظاهرتين، أي النمط العام للتغيير في قيم ظاهرة تبعاً لتغير الظاهرة الأخرى. وفي الواقع قد يكون التغير في قيم الظاهرتين ناتجاً من تأثير ظاهرة أو ظواهر أخرى وفي هذه الحالة سمى الارتباط بالارتباط المتعدد.

والارتباط بصورة عامة قد يكون بين ظواهر كمية أو ظواهر نوعية أو ظواهر مختلفة، فإذا كنا بصدد دراسة الارتباط بين ظاهرتين كميتين نسمي ذلك ارتباطاً وإذا كانت الظاهرتان نوعيتين وأمكن تقسيم كل ظاهرة إلى صفتين فقط مثل موجود وغير موجود نسمي ذلك اقتراناً، أما إذا تم تقسيم الظاهرتين إلى أكثر من صفتين فيسمى ذلك توافقاً. ومن الواضح أن كل هذه التسميات تدل على الارتباط واختلاف تسمياتها من الناحية اللغوية أي اللفظية فقط حتى تكون أكثر دلالة في المعنى.

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو كيف يمكننا قياس الارتباط؟

الإجابة على هذا السؤال تقدمه لنا معاملات الارتباط التي تدل فقط على درجة قوة العلاقة بين الظاهرتين من حيث هي علاقة قوية أم ضعيفة. وكذلك اتجاهها طردي أو عكسي.

وهناك عدة معاملات للارتباط منها الذي يستخدم للبيانات الكمية وأخرى تستخدم للبيانات النوعية الخاضعة أو غير الخاضعة للترتيب.

5 ـ 2 ـ 1 معامل الارتباط لبيرسون:

لقد بنى بيرسون معامل ارتباطه على أن كل تغيير لقيم الظاهرة الأولى يصاحبه تغيير لقيم الظاهرة الثانية، فإذا تم حساب انحراف كل قيمة عن متوسطها لكل ظاهرة وتم قسمة كل انحراف على الانحراف المعياري للظاهرة فنحصل على تغيرات نسبية خالية من التمييز الخاص بالظاهرة (أي نحصل على

القيم المعيارية لكل ظاهرة على حدة). فإذا تم ضرب كل قيمتين معيارتين متناظرتين سوف نحصل على قيمة تكون موجبة في حالة التغير الموجب في الظاهرة الأولى يصاحبه تغير موجب في الظاهرة الثانية، وكذلك التغير السالب في الظاهرة الأولى يصاحبه تغير سالب في الظاهرة الثانية، فيكون الناتج موجباً ويدل ذلك على ارتباط طردي (موجب). أما إذا كان التغير في الظاهرة الأولى موجباً يصاحبه تغير في الظاهرة الثانية سالب أو العكس يكون الناتج سالباً ويدل على ارتباط سالب (عكسي)، وعليه وضع بيرسون معادلة تحسب معامل الارتباط الذي يوضح قوة الارتباط واتجاهه إذا كان طردياً أو عكسياً وتكون قيمته محصورة بين ± 1 فإذا كانت القيمة مساوية للواحد الصحيح كان الارتباط تاماً موجباً أو تاماً سالباً، وكلما بعد عن الواحد واقترب من الصفر كان الارتباط ضعيفاً، وإذا كانت قيمته تساوي صفراً فلا يوجد ارتباط بينهما وقد سمى هذا المعامل باسم معامل الارتباط لبيرسون ويرمز له بالرمز ر حيث $-1 \leqslant \text{ر} \leqslant 1$.

فإذا كانت لدينا ظاهرتين س، ص يكون معامل الارتباط بينهما كما يلي:

$$\text{ر} = \frac{1}{\text{ن}} \text{مجـ} \frac{(\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}})}{\text{ع}_{\text{س}}} \times \frac{(\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}})}{\text{ع}_{\text{ص}}}$$

حيث ن عدد القيم المزدوجة، $\text{ع}_{\text{س}}$ ، $\text{ع}_{\text{ص}}$ هما الانحراف المعياري للظاهرتين س، ص على الترتيب.

ويمكن تبسيط هذه المعادلة لتسهيل الحسابات اللازمة لحساب معامل الارتباط وذلك كما يلي:

$$\text{مجـ} (\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}}) (\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}}) = \text{مجـ} [\text{س}_{\text{ر}}\text{ص}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}} \overline{\text{ص}} - \text{ص}_{\text{ر}} \overline{\text{س}} + \overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}]$$

$$= \text{مجـ}\, \text{س}_{\text{ر}}\, \text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}}\, \text{مجـ}\, \text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}}\, \text{مجـ}\, \text{ص}_{\text{ر}} + \text{ن}\, \overline{\text{س}}\, \overline{\text{ص}}$$

$$= \text{مجـ } س_ر ص_ر - ن \bar{ص} \times \bar{س} - ن \bar{س}\bar{ص} + ن \bar{س}\bar{ص}$$

$$= \text{مجـ } س_ر ص_ر - ن \bar{س}\bar{ص} = \text{مجـ } س_ر ص_ر - \frac{\text{مجـ } س_ر \text{ مجـ } ص_ر}{ن}$$

كذلك نجد أن $ع_س^2 = \frac{1}{ن}\left[\text{مجـ } س_ر^2 - \frac{(\text{مجـ } س_ر)^2}{ن}\right]$

$$ع_ص^2 = \frac{1}{ن}\left[\text{مجـ } ص_ر^2 - \frac{(\text{مجـ } ص_ر)^2}{ن}\right]$$

$$\therefore ر = \frac{\frac{1}{ن}\left[\text{مجـ } س_ر ص_ر - \frac{\text{مجـ } س_ر \text{ مجـ } ص_ر}{ن}\right]}{\sqrt{\frac{1}{ن}\left[\text{مجـ } س_ر^2 - \frac{(\text{مجـ } س_ر)^2}{ن}\right]\frac{1}{ن}\left[\text{مجـ } ص_ر^2 - \frac{(\text{مجـ } ص_ر)^2}{ن}\right]}}$$

$$= \frac{ن \text{ مجـ } س_ر ص_ر - \text{مجـ } س_ر \text{ مجـ } ص_ر}{\sqrt{\left[ن \text{ مجـ } س_ر^2 - (\text{مجـ } س_ر)^2\right]\left[ن \text{ مجـ } ص_ر^2 - (\text{مجـ } ص_ر)^2\right]}}$$

ملحوظة: يستخدم معامل الارتباط لبيرسون لقياس قوة العلاقة بين ظاهرتين عندما تكون العلاقة خطية أي التغير في الظاهرتين لا يختلف نوعه من أول المدى إلى آخره للظاهرتين أي أن نمط التغير واحد، أما إذا اختلف نوع التغير فيستخدم معامل آخر سوف يتم التعرض له في الباب التالي.

مثال 1: البيانات التالية توضح مدة الخبرة لخمسة صرافين ومتوسط عدد الزبائن في الساعة الذين تمت خدمتهم. فهل تدل هذه المعلومات على أن الظاهرتين تؤثران على بعضهما؟ ووضح قوة ونوع التأثير.

مدة الخبرة بالشهر	4	7	2	12	5
عدد الزبائن في الساعة	10	18	10	28	14

لتوضيح قوة ونوع التأثيرين للظاهرتين نحسب معامل الارتباط كما يلي:

						المجموع
س	4	7	2	12	5	30
ص	10	18	10	28	14	80
س ص	40	126	20	336	70	592
$س^2$	16	49	4	144	25	238
$ص^2$	100	324	100	784	196	1504

$$\therefore ر = \frac{ن \text{ مجـ } س ص - \text{مجـ } س \text{ مجـ } ص}{\sqrt{\left[ن \text{ مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2\right]\left[ن \text{ مجـ } ص^2 - (\text{مجـ } ص)^2\right]}}$$

$$= \frac{5 \times 592 - 30 \times 80}{\sqrt{\left[5 \times 238 - (30)^2\right]\left[5 \times 1504 - (80)^2\right]}} = \frac{560}{\sqrt{290 \times 1120}}$$

$$= \frac{560}{570} = 0.98$$

حيث أن إشارة معامل الارتباط موجبة فإن ذلك يدل على أن الارتباط بين الظاهرتين طردي، وحيث أن قيمته قريبة جداً من الواحد الصحيح فهذا يدل على أن الارتباط قوي بين الظاهرتين.

مثال 2: إحسب قوة العلاقة بين الظاهرتين س، ص بناءً على المعلومات التالية:

س	1	3	2	4	5
ص	8	6	3	5	7

لحساب قوة العلاقة بين الظاهرتين نوجد معامل الارتباط بينهما كما يلي:

						المجموع
س	1	3	2	4	5	15
ص	8	6	3	5	7	29
س ص	8	18	6	20	35	87
$س^2$	1	9	4	16	25	55
$ص^2$	64	36	9	25	49	183

$$\therefore\ ر = \frac{5 \times 87 - 15 \times 29}{\sqrt{\left[5 \times 55 - (15)^2\right]\left[5 \times 183 - (29)^2\right]}} = \frac{435 - 435}{\sqrt{50 \times 74}} = 0$$

حيث أن قيمة معامل الارتباط صفر، عليه فلا يوجد ارتباط بين هاتين الظاهرتين. وهذا واضح من البيانات حيث لا يوجد نمط خطي لتغير الظاهرتين.

5 ـ 2 ـ 2 معامل الارتباط لبيرسون للبيانات المبوبة:

إذا كانت لدينا بيانات معروضة في جدول مزدوج فيتم حساب معامل الارتباط بين الظاهرتين كما هو موضح في المثال التالي:

مثال 3: الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلبة في مقررين فبين قوة العلاقة بين هذين المقررين.

درجة المقرر 1 / درجة المقرر 2	0 ـ 20	20 ـ 40	40 ـ 60	60 ـ 80	80 ـ 100	المجموع
0 ـ 20	2	4	2			8
20 ـ 40		8	6	4		18
40 ـ 60		2	10	14	4	30
60 ـ 80			4	6	6	16
80 ـ 100			2	4	8	14
المجموع	2	14	24	28	18	86

حيث أن لدينا تكرارات مناظرة للقيم المختلفة للظاهرتين عليه يكون معامل الارتباط في هذه الحالة كما يلي بفرض أن الظاهرة الأولى س، والثانية ص يكون:

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ ك_{س ص}\ س_ر ص_ر - مجـ\ ك_س س_ر\ مجـ\ ك_ص ص_ر}{\sqrt{\left[ن\ مجـ\ ك_س س_ر^2 - (مجـ\ ك_س س_ر)^2\right]\left[ن\ مجـ\ ك_ص ص_ر^2 - (مجـ\ ك_ص ص_ر)^2\right]}}$$

حيث ن مجموع التكرارات، $ك_س$، $ك_ص$ التكرار الهامشي لكل من س، ص، $ك_{س ص}$ تكرار كل قيمتين متناظرتين.

ولحساب معامل الارتباط يتم حساب كل من: $مجـ\ ك_س س_ر$، $مجـ\ ك_ص ص_ر$، $مجـ\ ك_س س^2_ر$، $مجـ\ ك_ص ص_ر^2$، $مجـ\ ك_{س ص}\ س_ر ص_ر$ على النحو التالي:

1 ـ نحسب مراكز الفترات للظاهرة ص كما هو مبين في العمود 1.

2 ـ نختار وسطاً فرضياً لهذه الظاهرة وليكن 50 ونحسب انحراف المراكز على الوسط الفرضي ونرمز له بالرمز $ح_ص$ حيث $ح_ص = ص_ر - 50$ كما هو مبين في العمود 2.

3 ـ نقسم كل انحراف على طول الفترة ونرمز له بالرمز حَص حيثُ:

$$حَ_{ص} = \frac{ص_{ر} - 50}{20}$$

وهو مبين في العمود 3.

4 ـ نحسب في العمود 4 حاصل ضرب التكرار الهامشي للظاهرة ص في حَص.

5 ـ نحسب في العمود 5 حاصل ضرب التكرار الهامشي للظاهرة ص في $حَ_{ص}^{2}$.

6 ـ نحسب في العمود 6 لكل مركز للظاهرة ص المجموع الناتج من حاصل ضرب كل تكرار للظاهرة س في حَس المناظرة لذلك المركز (مج كس حَس)، فمثلاً القيمة الأولى بهذا العمود ناتجة من:

$$(0 \times 2 + 1 - \times 4 + 2 - \times 2) = - 8.$$

7 ـ نحسب في العمود 7 حاصل ضرب العمود 6 مضروباً في حَص فمثلاً القيمة الأولى بهذا العمود ناتجة من -8 × -2 = 16.

8 ـ بنفس الطريقة يتم حساب الصفوف 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 للظاهرة س حيث يبين الصف 1 مراكز الفترات، الصف 2 انحراف المراكز على الوسط الفرضي حس = سر ـ 50، الصف 3 يوضح الانحراف مقسوماً على طول الفترة للظاهرة س، الصف 4 يوضح مج كس سر، مج كس $سر^{2}$ في الصف 5، الصف 6 يبين مج كس حص، الصف 7 يوضح مج كس من سر صر.

وبهذه الطريقة نحصل على الجدول التالي ومنه يتم حساب ر.

$$\therefore ر = \frac{10 \times 46 - 78 \times 86}{\sqrt{\left[(10)^{2} - 122 \times 86\right]\left[(46)^{2} - 122 \times 86\right]}} = \frac{460 - 6708}{\sqrt{10392 \times 8376}}$$

$$= \frac{6248}{9329.7} = 0.67$$

وحيث أن إشارة معامل الارتباط موجبة يدل ذلك على وجود علاقة طردية بين الظاهرتين ولكنها ليست قوية لأن قيمته ليست قريبة من الواحد.

ص \ س	20-0	40-20	60-40	80-60	100-80	المجموع	1 المركز ص	2 ح ص = ص - 50	3 ح' ص = $\frac{ص-50}{20}$	4 ك ص ح ص	5 ك ص ح'^{2} ص	6 ك ص ح' ص	7 ك ص ح' س ح' ص
20-0	2	4	2			8	10	40-	2-	16-	32	8-	16
40-20		8	6	4		18	30	20-	1-	18-	18	4-	4
60-40		2	10	14	4	30	50	0	0	0	0	20	0
80-60			4	6	6	16	70	20	1	16	16	18	18
100-80			2	4	8	14	90	40	2	28	56	20	40
المجموع	2	14	24	28	18	86				10	122	46	78
1 المركز س	10	30	50	70	90								
2 ح س = س - 50	40-	20-	0	20	40								
3 ح' س = $\frac{س-50}{20}$	2-	1-	0	1	2								
4 ك س ح س	4-	14-	0	28	36	46							
5 ك س ح'^{2} س	8	14	0	28	72	122							
6 ك س ح' س	4-	16-	2-	10	22	10							
7 ك س ح' س ح' ص	8	16	0	10	44	78							

ملحوظة: من الواضح أن مجموع العمود 7 هو نفسه مجموع الصف 7، كذلك مجموع العمود 6 هو نفس مجموع الصف 4 ومجموع العمود 4 هو نفس مجموع الصف 6 ولكن حسب بطريقتين مختلفتين لزيادة التأكيد، ولكن تساوي مج ك س ح'^{2} س، مج ك ص ح'^{2} ص في هذا المثال جاء من نتيجة صدفة فقط.

5 ـ 2 ـ 3 معامل الارتباط للبيانات النوعية الخاضعة للترتيب:

(معامل ارتباط الرتب لسبيرمان)

لقد ذكرنا أن بعض الظواهر لا تأخذ قيماً عددية ولكن يعبر عنها بصفات أو أنواع قد تكون خاضعة للترتيب أو غير خاضعة للترتيب. فإذا كانت لدينا ظاهرتان خاضعتان للترتيب وأردنا حساب معامل الارتباط بينهما فمن الواضح أنه لا يمكن حساب ذلك باستخدام معامل الارتباط لبيرسون، عليه فقد وجد سبيرمان طريقة أخرى لحساب معامل الارتباط وقد سمى هذا المعامل باسمه، ونلخص هذه الطريقة في إعطاء رتب تصاعدية أو تنازلية للظاهرتين على أن تكون الطريقة واحدة، فإذا كانت الرتب على نمط واحد للظاهرتين دل ذلك على وجود ارتباط طردي وإذا كان نمط الرتب متعاكساً دل ذلك على وجود ارتباط عكسي. فإذا كانت رتب الظاهرة الأولى هي 1، 2، 3، . . . ، ن وكذلك رتب الظاهرة الثانية 1، 2، 3، . . . ن. عليه يكون:

$$مج\ ص_ر = مج\ س_ر = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + ن = \frac{ن(ن+1)}{2}$$

كذلك نجد أن $مج\ س_ر^2 = مج\ ص_ر^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$

، $مج\ (س_ر - ص_ر)^2 = مج\ ف_ر^2$ حيث $ف_ر$ هو الفرق بين الرتبتين المتناظرتين

$$\therefore مج\ (س_ر^2 - 2\ س_ر\ ص_ر + ص_ر^2) = مج\ ف_ر^2$$

$$2\ مج\ س_ر^2 - 2\ مج\ س_ر\ ص_ر = مج\ ف_ر^2$$

$$\therefore \frac{2\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6} - 2\,\text{مجـ س}_\text{ر}\text{ص}_\text{ر} = \text{مجـ ف}_\text{ر}^2$$

$$\therefore \text{مجـ س}_\text{ر}\text{ص}_\text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6} - \frac{1}{2}\,\text{مجـ ف}_\text{ر}^2$$

وبالتعويض بهذه القيم في معادلة معامل الارتباط نجد أن:

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{\text{ن} \times \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6} - \frac{1}{2}\,\text{مجـ ف}^2\right] - \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right]^2}{\left[\frac{\text{ن}\left[\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)\right]}{6}\right] - \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right]^2}$$

$$= \frac{2\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1) - 3\text{ن}(\text{ن}+1)^2 - 6\,\text{مجـ ف}^2}{2\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1) - 3\text{ن}(\text{ن}+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{2\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1) - 3\text{ن}(\text{ن}+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{4\text{ن}^3 + 6\text{ن}^2 + 2\text{ن} - 3\text{ن}^3 - 6\text{ن}^2 - 3\text{ن}}$$

$$= 1 - \frac{\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}^3 - \text{ن}} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

وهو ما سمي بمعامل الارتباط للرتب لسبيرمان، ويستخدم هذا المعامل لقياس قوة تأثير ظاهرتين نوعيتين على بعضهما على أساس أن تقابل كل صفة رتبة وكل رتبة صفة، عليه إذا كانت الصفات مكررة يجب تعديل الرتب كما سنوضح فيما بعد.

أولاً ـ معامل ارتباط الرتب للصفات غير المكررة:

لحساب معامل الارتباط بين ظاهرتين نوعيتين بدون تكرار للصفات تعطي رتباً لكل ظاهرة على حدة بنفس الطريقة إما تصاعدياً أو تنازلياً، ثم نحسب الفرق بين كل رتبتين متناظرتين ونربع هذه الفروق فنحصل على مجموع هذه المربعات ونطبق القانون كما يوضح المثال التالي:

مثال 4: إذا كان تقديرات 5 طلبة في مقررين كما يلي فاحسب قوة العلاقة بينهما.

الطالب	1	2	3	4	5
تقدير المقرر 1	حـ	م	حـ حـ	ل	ض
تقدير المقرر 2	ل	حـ حـ	حـ	م	ض

لحساب معامل الارتباط نكون الجدول التالي:

تقدير المقرر 1	تقدير المقرر 2	رتب المقرر 1	رتب المقرر 2	ف	$ف^2$
حـ	ل	3	4	-1	1
م	حـ حـ	1	2	-1	1
حـ حـ	حـ	2	3	-1	1
ل	م	4	1	3	9
ض	ض	5	5	0	0
					12

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 12}{5 \times 24} = 1 - 0.6 = 0.4$$

حيث أن إشارة معامل الارتباط موجبة يدل ذلك على أن العلاقة طردية بين الظاهرتين وحيث أن قيمته بعيدة عن الواحد، عليه فإن قوة التأثير (أي الارتباط) بينهما ضعيفة.

ثانياً ـ معامل إرتباط الرتب للصفات المكررة:

إذا كانت لدينا صفات مكررة لإحدى الظاهرتين أو كليهما فيجب تعديل الرتب المكررة أولاً وذلك بحساب متوسط الرتب المكررة لكل صفة واعتباره رتبة كل العناصر التي تحمل هذه الصفة ثم نحسب الفروق بعد التعديل. ولتوضيح الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال 5: البيانات التالية توضح مستوى الدقة في العمل والمستوى التعليمي لمجموعة من العاملين، لهم نفس سنوات الخبرة بإحدى المؤسسات والمطلوب حساب قوة العلاقة بين هاتين الظاهرتين.

مستوى الدقة	عالي	عالي جداً	متوسط	ضعيف	عالي	عالي	ضعيف	متوسط
المستوى التعليمي	شهادة عالية	شهادة عالية	شهادة متوسطة	بسيطة	متوسطة	عالية	بسيطة	عالية

لحساب معامل الارتباط لهذه البيانات نحسب معامل ارتباط الرتب لأن البيانات نوعية خاضعة للترتيب وذلك على النحو التالي:

مستوى الدقة المستوى التعليمي	عالي شهادة عالية	عالي جداً شهادة عالية	متوسط شهادة متوسطة	ضعيف بسيطة	عالي متوسطة	عالي عالية	ضعيف بسيطة	متوسط عالية
رتب الدقة	5	8	3	1	6	7	2	4
رتب التعليم	5	6	3	1	4	7	2	8
الرتب المعدلة للدقة	6	8	3.5	1.5	6	6	1.5	3.5
الرتب المعدلة للتعليم	6.5	6.5	3.5	1.5	3.5	6.5	1.5	6.5
ف	.5 ـ	1.5	0	0	2.5	.5 ـ	0	3 ـ
$ف^2$	.25	2.25	0	0	6.25	.25	0	18 = 9

وبذلك يكون معامل الارتباط $ر = 1 - \frac{6 \text{ مجـ} ف^2}{ن(ن^2 - 1)} = 1 - \frac{18 \times 6}{63 \times 8} = 0.79$

عليه نستنتج بأن قوة التأثير بين الظاهرتين مستوى الدقة والمستوى التعليمي لهؤلاء العاملين قوية طردية.

5 ـ 2 ـ 4 معامل الارتباط للبيانات النوعية غير الخاضعة للترتيب:

في كثير من الحالات تصادفنا بيانات نوعية غير خاضعة للترتيب ونود معرفة مدى تأثيرها على بعضها، فقد وضع الإحصائيون مقاييس تبين لنا قوة الارتباط بين هذه الظواهر نذكر منها معامل الاقتران ومعامل التوافق.

أولاً ـ معامل الاقتران:

إذا أمكن تقسيم كل ظاهرة إلى صفتين فقط وتم حصر الأعداد التي تتوفر فيها كل صفتين متناظرتين للظاهرتين نحصل على جدول مزدوج يكون على الشكل التالي:

الظاهرة 1 / الظاهرة 2	الصفة الأولى	الصفة الثانية
الصفة الأولى	أ	ب
الصفة الثانية	جـ	د

حيث أ يبين عدد العناصر التي تحمل الصفة الأولى للظاهرة 1 والصفة الأولى للظاهرة 2، ب هو عدد العناصر التي تحمل الصفة الثانية للظاهرة 1 والصفة الأولى للظاهرة 2 وهكذا.

$$\text{ويكون معامل الاقتران} = \frac{أ د - ب جـ}{أ د + ب جـ}$$

ومن الواضح أن هذا المعامل يعبر عن مدى اقتران الصفة الأولى للظاهرة الأولى بالصفة الأولى للظاهرة الثانية. فإذا تغير وضع الجدول يتغير تبعاً لذلك مفهوم الاقتران.

مثال 6: لدراسة عن مدى اقتران الجنس بظاهرة التدخين تم اختيار عينة من 100 شخص وتم تصنيفها إلى مدخن وغير مدخن وإلى رجل وإمرأة فكانت النتائج كما هي مبينة في الجدول التالي، والمطلوب حساب قوة واتجاه العلاقة بين هاتين الظاهرتين.

التدخين / الجنس	رجل	إمرأة
يدخن	40	5
لا يدخن	10	45

لحساب قوة التأثير بين هاتين الظاهرتين نحسب معامل الاقتران:

$$\therefore \text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{أ د} + \text{ب جـ}} = \frac{10 \times 5 - 45 \times 40}{10 \times 5 + 45 \times 40} = 0.95$$

وبذلك فإن هذه البيانات توضح أن ظاهرة التدخين مقترنة مع الرجال اقتراناً قوياً، أي أن الارتباط قوي بين الرجال والتدخين. ومن الواضح لو بدلنا الجدول بحيث يكون عمود الرجال هو الثاني يكون معامل الاقتران = -0.95 أي أن الاقتران بين الصفة الثانية (الرجال) لظاهرة الجنس والصفة الأولى (يدخن) لظاهرة التدخين، وهو نفس الاستنتاج الأول.

ثانياً ـ معامل التوافق:

إذا كانت البيانات عن الظاهرتين مقسمة إلى أكثر من صفتين فنحسب قوة الارتباط في هذه الحالة باستخدام ما يسمى بمعامل التوافق وهو مقياس يدل على مدى توافق الصفات للظاهرتين مع بعضها. ويعرف معامل التوافق كما يلي:

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{ق} - 1}{\text{ق}}}$$

حيث ق تدل على المجموع الناتج من قسمة مربع كل خانة بالجدول

على مجموع صفها في مجموع عموماً كما هو موضح في المثال التالي:

مثال: أراد أحد البحاث القيام بدراسة لمعرفة مدى الارتباط بين الجنس وطبيعة العمل (الوظيفة)، فتم اختيار عينة من 300 شخص وتم تصنيفها إلى رجال ونساء حسب الوظيفة (المهنة) فكانت النتائج كما هي مبينة في الجدول، فبين ماذا توضح هذه النتائج؟

العمل / الجنس	مجال الإدارة	مجال المحاسبة	مجال الطب	مجال الهندسة	المجموع
رجال	40	60	50	30	180
نساء	30	45	40	5	120
المجموع	70	105	90	35	300

لتوضيح عما إذا كان هناك ارتباط (أي توافق) بين الجنس ونوع العمل يحسب معامل التوافق كما يلي:

$$\text{ق} = \frac{(40)^2}{70 \times 180} + \frac{(30)^2}{70 \times 120} + \frac{(60)^2}{105 \times 180} + \frac{(45)^2}{105 \times 120}$$

$$+ \frac{(50)^2}{90 \times 180} + \frac{(40)^2}{90 \times 120} + \frac{(30)^2}{35 \times 180} + \frac{(5)^2}{35 \times 120} = 1.108$$

$$\therefore \text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{ق} - 1}{\text{ق}}} = \sqrt{\frac{0.108}{1.108}} = 0.31$$

وبذلك يتضح من قيمة معامل التوافق بأن التوافق بين الظاهرتين ضعيف.

ملحوظة: من معادلة معامل التوافق يتضح أنه لا يمكن أن تكون قيمته واحداً وهذا يتمشى مع مفهوم التوافق حيث لا نستطيع أن نقول بأن التوافق تام

ولكن يمكن أن تكون قيمته صفراً عندما تتساوى جميع الخانات بالجدول مما يدل على عدم وجود نوع من التوافق.

5 ـ 3 الارتباط المتعدد:

معامل الارتباط البسيط الذي تم التعرض له سابقاً يقيس قوة العلاقة الخطية بين ظاهرتين، أي يوضح مدى تأثير ظاهرة على ظاهرة أخرى بفرض عدم وجود تأثيرات من ظواهر أخرى، ولكن في الواقع نجد في عدة مجالات أن ظاهرة تقع تحت تأثير عدة ظواهر أخرى. فمثلاً سعر سلعة ما يقع تحت تأثير العرض والطلب لهذه السلعة، كذلك كمية الإنتاج لسلعة معينة يؤثر عليه عدد العاملين وتكاليف المادة الخام وزمن الإنتاج، كما أن كمية إنتاج الشعير للهكتار يقع تحت تأثير كمية السماد والماء ودرجة الحرارة. كذلك فإن ظاهرة الدرجات للطلبة في الامتحانات تتأثر بعدد الساعات التي يذاكرها الطالب وعدد أيام غيابه وهكذا. وفي مثل هذه المواقف يكون اهتمامنا التعرف على قوة تأثير هذه الظواهر العديدة على بعضها البعض والطريقة التي يتم بها ذلك هو ما يسمى بمعامل الارتباط المتعدد الذي يوضح قوة تأثير عدة ظواهر باعتبارها ظواهر مستقلة على ظاهرة أخرى باعتبارها الظاهرة التابعة.

ويعرف معامل الارتباط المتعدد كما يلي:

إذا كانت لدينا الظواهر س، ص، ع يكون معامل الارتباط المتعدد الذي بين قوة تأثير الظاهرتين ص، ع على الظاهرة س هو:

$$ر_{س.ص ع} = \sqrt{\frac{ر^2_{سص} + ر^2_{سع} - 2 ر_{سص} ر_{سع} ر_{صع}}{1 - ر^2_{صع}}}$$

ومعامل الارتباط المتعدد لتأثير س ع على ص هو:

$$ر_{ص.س ع} = \sqrt{\frac{ر^2_{صس} + ر^2_{صع} - 2 ر_{سص} ر_{سع} ر_{صع}}{1 - ر^2_{سع}}}$$

أما معامل الارتباط المتعدد لتأثير س ص على ع يكون:

$$ر_{ع.س ص} = \sqrt{\frac{ر^2_{عس} + ر^2_{عص} - 2 ر_{سص} ر_{سع} ر_{صع}}{1 - ر^2_{سص}}}$$

ومن الواضح أن قيمة معامل الارتباط المتعدد محصورة بين 0، 1 فكلما كانت قيمته قريبة من الصفر كان التأثير من الظاهرتين ضعيفاً على الظاهرة الأخرى.

مثال 8: إذا علمت بأن معاملات الارتباط البسيطة بين كل من س، ص، ع هي: $ر_{سص} = 0.65$، $ر_{سع} = 0.6$، $ر_{صع} = 0.9$

فاحسب معاملات الارتباط المتعدد لهذه الظواهر:

$$ر_{س.ص ع} = \sqrt{\frac{ر^2_{سص} + ر^2_{سع} - 2 ر_{سص} ر_{سع} ر_{صع}}{1 - ر^2_{صع}}}$$

$$= \sqrt{\frac{.9 \times .6 \times .65 \times 2 - .36 + .4225}{.81 - 1}} = 0.65$$

$$ر_{ص.س ع} = \sqrt{\frac{ر^2_{سص} + ر^2_{صع} - 2 ر_{سص} ر_{سع} ر_{صع}}{1 - ر^2_{سع}}}$$

$$= \sqrt{\frac{.9 \times .6 \times .65 \times 2 - .81 + .4225}{.36 - 1}} = .91$$

$$ر_{ع.س ص} = \sqrt{\frac{ر^2_{ع س} + ر^2_{ع ص} - 2ر_{س ص}\, ر_{س ع}\, ر_{ص ع}}{1 - ر^2_{س ص}}}$$

$$= \sqrt{\frac{.86 + .81 - 2 \times .65 \times .6 \times .9}{1 - .4225}} = .9$$

ومن ذلك يتضح أن تأثير س، ع على ص وتأثير س، ص على ع أكثر من تأثير ص، ع على س وهذا يرجع إلى أن تأثير ص على ع تأثير قوي، كما يتضح من معامل الارتباط البسيط بينهما.

5 ـ 4 الارتباط الجزئي:

عرفنا أن معامل الارتباط المتعدد يقيس تأثير عدة ظواهر على ظاهرة ما وأن معامل الارتباط البسيط بين ظاهرتين يوضح قوة تأثير ظاهرة على أخرى، ولكن في حالة وجود ظاهرة ثالثة فإنه لقياس الارتباط الصحيح بين هاتين الظاهرتين يتطلب أولاً استبعاد تأثير الظاهرة الثالثة منهما وذلك عن طريق ما يسمى بمعامل الارتباط الجزئي الذي يقيس تأثير ظاهرتين بعزل تأثير الظاهرة الثالثة إن وجد، أي كأننا نحسب معامل الارتباط بين ظاهرتين بثبات قيمة الظاهرة الثالثة. فإذا كان لدينا الظواهر س، ص، ع فإن معاملات الارتباط الجزئية تعرف كما يلي:

$$ر_{س ص.ع} = \sqrt{\frac{ر_{س ص} - ر_{س ع}\, ر_{ص ع}}{(1 - ر^2_{س ع})(1 - ر^2_{ص ع})}}$$

وهو معامل الارتباط بين س، ص، مع عزل تأثير ع على كل منهما.

$$ر_{س ع.ص} = \sqrt{\frac{ر_{س ع} - ر_{س ص}\, ر_{ع ص}}{(1 - ر^2_{س ص})(1 - ر^2_{ع ص})}}$$

وهو معامل الارتباط بين س، ع بعزل تأثير ص على كل منهما.

$$ر_{ص ع.س} = \sqrt{\frac{ر_{ص ع} - ر_{ص س}\, ر_{س ع}}{(1 - ر^2_{ص س})(1 - ر^2_{س ع})}}$$

وهو معامل الارتباط بين ص، ع بعزل تأثير س على كل منهما.

مثال 9: البيانات التالية توضح قيم ثلاث ظواهر فاحسب معاملات الارتباط الجزئية الثلاثة.

س	ص	ع
3	2	8
4	6	5
6	8	4
7	11	1
8	13	2

لحساب معاملات الارتباط الجزئية نحسب أولاً معاملات الارتباط البسيطة (العادية) بينهم كما يلي: ولتبسيط الحسابات نكون الجدول التالي:

	س	ص	ع	س²	ص²	ع²	س ص	س ع	ص ع
	3	2	8	9	4	64	6	24	16
	4	6	5	16	36	25	24	20	30
	6	8	4	36	64	16	48	24	32
	7	11	1	49	121	1	77	7	11
	8	13	2	64	169	4	104	16	26
المجموع	28	40	20	174	394	110	259	91	115

$$\therefore\ r_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]}}$$

$$= \frac{5 \times 259 - 28 \times 40}{\sqrt{[5 \times 174 - (28)^2]\,[5 \times 394 - (40)^2]}}$$

$$= \frac{175}{\sqrt{86 \times 370}} = \frac{175}{178.38} = 0.98$$

$$\therefore\ r_{\text{س ع}} = \frac{\text{ن مجـ س ع} - \text{مجـ س مجـ ع}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ع}^2 - (\text{مجـ ع})^2]}}$$

$$= \frac{5 \times 91 - 28 \times 20}{\sqrt{[5 \times 174 - (28)^2]\,[5 \times 110 - (20)^2]}}$$

$$= -\frac{105}{113.6} = -0.92$$

$$r_{\text{ص ع}} = \frac{\text{ن مجـ ص ع} - \text{مجـ ص مجـ ع}}{\sqrt{[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]\,[\text{ن مجـ ع}^2 - (\text{مجـ ع})^2]}}$$

$$= \frac{5 \times 115 - 40 \times 20}{\sqrt{[5 \times 394 - 40^2]\,[5 \times 110 - (20)^2]}}$$

$$= -\frac{225}{235.6} = -0.96$$

وبذلك تكون معاملات الارتباط الجزئية كما يلي:

$$r_{\text{س ص.ع}} = \frac{r_{\text{س ص}} - r_{\text{س ع}}\, r_{\text{ص ع}}}{\sqrt{(1 - r^2_{\text{س ع}})\,(1 - r^2_{\text{ص ع}})}} = \frac{.98 - (-.92 \times -.96)}{\sqrt{(1 - .8464)(1 - .9216)}}$$

$$= \frac{.0968}{.1097} = 0.88$$

$$r_{\text{س ع.ص}} = \frac{r_{\text{س ع}} - r_{\text{س ص}}\, r_{\text{ص ع}}}{\sqrt{(1 - r^2_{\text{س ص}})\,(1 - r^2_{\text{ص ع}})}} = \frac{.92 - (.98 \times -.96)}{\sqrt{(1 - .9604)(1 - .9216)}}$$

$$= \frac{.0208}{.0557} = .37$$

$$r_{\text{ص ع.س}} = \frac{r_{\text{ص ع}} - r_{\text{س ص}}\, r_{\text{س ع}}}{\sqrt{(1 - r^2_{\text{س ص}})\,(1 - r^2_{\text{س ع}})}} = \frac{-.96 - (.98 \times -.92)}{\sqrt{(1 - .9604)(1 - .8464)}}$$

$$= -\frac{.0584}{.078} = -.75$$

مثال 10: إذا حسب أحد الطلبة معاملات الارتباط باستخدام آلة حاسبة لثلاث ظواهر فكانت النتائج كالآتي:

$ر_{س ص} = .91$، $ر_{س ع} = .33$، $ر_{ص ع} = .81$. فهل تعتقد أن هذه النتائج خالية من الخطأ.

لتوضيح ما إذا كانت هذه النتائج صحيحة نحسب معاملات الارتباط الجزئية كما يلي:

$$ر_{س ص.ع} = \frac{ر_{س ص} - ر_{س ع}\, ر_{ص ع}}{\left(1 - ر^2_{س ع}\right)\left(1 - ر^2_{ص ع}\right)} = \frac{.91 - (.33 \times .81)}{(1 - .1089)(1 - .6561)}$$

$$= \frac{.6427}{.5536} = 1.16$$

وهذه النتيجة غير صحيحة لأن معامل الارتباط الجزئي محصور بين ± 1 وعليه فإن النتائج المحسوبة غير صحيحة.

5 ـ 4 ـ 1 العلاقة بين معاملات الارتباط:

(1) $1 - ر^2_{س.ص ع} = \left(1 - ر^2_{س ص}\right)\left(1 - ر^2_{س ع.ص}\right)$

$= \left(1 - ر^2_{س ع}\right)\left(1 - ر^2_{س ص.ع}\right)$

(2) $ر_{س.ص ع} \geqslant |ر_{س ص}|$، $ر_{س.ص ع} \geqslant |ر_{س ع}|$

(3) إذا كان $ر_{س.ص ع} = 0$ فإن $ر_{س ص} = ر_{س ع} = 0$

تمارين

1 ـ أذكر مثالاً في مجال التخصص للحالات التالية:

أ ـ معامل ارتباط ضعيف.

ب ـ معامل ارتباط عكسي قوي.

جـ ـ معامل اقتران ضعيف.

د ـ معامل توافق قوي.

هـ ـ معامل ارتباط الرتب قوي.

و ـ معامل ارتباط مساوٍ الصفر.

2 ـ وضح نوع واتجاه الارتباط للحالات التالية:

أ ـ مبيعات منشأة المشروبات ودرجة الحرارة.

ب ـ تكاليف إنتاج سلعة ما ومستوى الجودة.

جـ ـ الثقافة وانتشار الأمراض.

د ـ كمية الإنتاج وكمية الاستيراد لسلعة ما.

هـ ـ الطول والوزن والعمر لمجموعة الأطفال.

و ـ العمر والدخل.

ز ـ سعر تكاليف قطعة إنتاج والكمية المنتجة منها.

3 ـ إذا تم ترتيب عشرة متسابقين من قبل لجنتي تحكيم فكانت النتائج كما يلي:

المتسابق	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ترتيب اللجنة 1	9	6	10	4	3	7	5	8	1	2
ترتيب اللجنة 2	2	10	6	8	5	7	3	9	4	1

فهل تعتقد بأن هناك تناسقاً بين ترتيب اللجنتين، ولماذا؟

4 ـ البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطلبة في مقرري الإحصاء والمحاسبة، فاحسب معامل الارتباط لبيرسون ومعامل ارتباط سبيرمان وعلق على النتائج.

درجة الإحصاء	80	56	36	66	58	75	83	72	40	58
درجة المحاسبة	75	45	52	56	62	68	76	65	35	65

5 ـ إذا حسبت معاملات الارتباط بين ثلاث ظواهر فكانت كما يلي:

$ر_{21}$ = .863، $ر_{31}$ = .648، $ر_{32}$ = .709. فأوجد معامل الارتباط المتعدد $ر_{1.32}$ ومعامل الارتباط الجزئي $ر_{3.21}$ وعلق على النتائج.

6 ـ أثبت أن معاملات الارتباط لثلاث ظواهر تحقق المتباينة التالية:

$$ر^2_{21} + ر^2_{31} + ر^2_{32} - 2ر_{21}\,ر_{31}\,ر_{32} \leqslant 1$$

7 ـ إذا علمت بأن ص = (س ـ 6)^2 فأوجد معامل الارتباط بينهما إذا كانت س تأخذ القيم 1, 2, 3, 4, 5.

8 ـ البيانات التالية حسبت لظاهرتين س، ص فكانت:

$\sum_{1}^{20}$ س = 110، مجـ ص = 100، مجـ س^2 = 500، مجـ ص^2 = 400، مجـ س ص = 450

فإذا علمت بأن الزوج (س = 5، ص = 8) قد حسب عن طريق الخطأ بدلاً من (س = 6، ص = 4) فأوجد قيمة معامل الارتباط الصحيحة.

9 ـ إذا حسبت البيانات التالية لمجتمع ظاهرتين س، ص فكانت

مجـ س = 4، مجـ ص = 3، مجـ س^2 = 17، مجـ ص^2 = 25، مجـ س ص = 0، ن = 5

فأوجد قيمة معامل الارتباط بينهما، وهل يوضح ذلك بأن البيانات صحيحة؟

10 ـ إذا علمت بأن في مسابقة فكرية تم ترتيب عشرة متسابقين من قبل ثلاثة حكام فكانت النتائج كما يلي:

المتسابق	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ترتيب الحكم الأول	1	6	3	10	5	2	4	9	7	8
ترتيب الحكم الثاني	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
ترتيب الحكم الثالث	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

فوضح أي حكمين لهما ميول متقاربة في هذه المسابقة الفكرية.

11 ـ إذا علمت بأن معامل الارتباط بين درجات الإحصاء ودرجات الرياضيات لمجموعة من الطلبة مصححة من 50 هو 0.42 فإذا عدل التصحيح من 100 فما معامل الارتباط بعد التعديل؟ وإذا تم إضافة 3 درجات لكل طالب في الإحصاء فما قيمة معامل الارتباط بعد الإضافة؟

12 ـ إذا كان معامل الارتباط بين درجات مجموعة من الطلبة في مقررين س، ص هو 0.5 فإذا كان:

$\bar{\text{س}}_1 = 10$، $\text{ع}_{\text{س}_1} = 5$،

$\bar{\text{ص}}_1 = 15$،

$\text{ع}_{\text{ص}_1} = 4$، $\text{ن}_1 = 10$

ومعامل الارتباط لمجموعة أخرى لنفس المقررين هو 0.6 حيث:

$\bar{\text{س}}_2 = 7.5$، $\text{ع}_{\text{س}_2} = 3$، $\bar{\text{ص}}_2 = 10$

، $\text{ع}_{\text{ص}_2} = 4$، $\text{ن}_2 = 15$

فاحسب معامل الارتباط إذا ضمت المجموعتان في مجموعة واحدة.

13 - إذا علمت بأن معامل ارتباط الرتب بين مستوى الدقة في العمل وسنوات الخبرة لمجموعة من المنتجين كان 0.8 فإذا اكتشف بأن فرق الرتب لأحد المنتجين قد حسب 4 بدلاً من 3 عن طريق الخطأ، فما قيمة معامل الارتباط الصحيح مع العلم بأن ن= 10؟

14 - إحسب معاملات الارتباط المتعدد ومعاملات الارتباط الجزئي للبيانات التالية:

1 -

س	1	2	3	4	5	6
ص	1	1.2	1.3	1.8	2	2.8
ع	5	3.5	3	4	1	2

2 -

س	7	8	3	6
ص	0	5	1	2
ع	2	3	1	2

3 -

س	74	59	83	76	69	88	71
ص	40	41	45	43	40	47	37
ع	91	72	95	90	82	98	80

15 - وضح ما إذا كان هناك تأثير بين الظواهر التالية:

1 -

الدقة / الجنسية	1	2	3
عالية	10	6	12
متوسطة	5	5	2
ضعيفة	3	4	1

2 -

المرض / التدخين	يدخن	لا يدخن
موجود	140	10
غير موجود	10	60

3 -

تقديرات المقرر 1	ممتاز	جيد	مقبول	جيد جداً	جيد	ضعيف	مقبول
تقديرات المقرر 2	جيد جداً	مقبول	ضعيف	جيد	جيد	ضعيف جداً	جيد

4 -

مستوى الدقة في العمل	عالي	متوسط	عالي جداً	متوسط	متوسط	عالي	متوسط	ضعيف
سنوات الخبرة	10	6	8	5	5	8	7	2

حل تمارين الباب الخامس

1 ـ أ ـ درجات مجموعة من الطلبة في مقرر المحاسبة واللغة العربية.

ب ـ العرض والسعر لسلعة ما.

جـ ـ جنس المحاسب والدقة في العمل (حيث الدقة مقسمة إلى دقيق، غير دقيق).

د ـ جنس المحاسب والتدخين (حيث التدخين مقسم إلى كثير، متوسط، قليل، لا يدخن).

هـ ـ الخبرة والدقة لمجموعة من المحاسبين.

و ـ درجات مقرر المحاسبة والطول لمجموعة من الطلبة.

ملاحظة: في الواقع لا نجد مثالاً لمعامل ارتباط صفر إلا إذا كانت الظاهرتان لا فائدة من دراسة الارتباط بينهما مثل المثال المذكور.

2 ـ أ ـ إرتباط طردي.

ب ـ إرتباط طردي.

جـ ـ توافق أو اقتران بين الثقافة وقلة انتشار الأراضي.

د ـ إرتباط عكسي.

هـ ـ إرتباط جزئي: الطول والوزن ـ طردي.

الطول والعمر ـ طردي.

العمر والوزن طردي.

و ـ إرتباط طردي.

ز ـ إرتباط طردي. (وإذا كان القصد بسعر التكاليف: سعر البيع فهو عكس).

3 ـ لمعرفة مدى التناسق بين ترتيب اللجنتين نستخدم معامل ارتباط الرتب لسبيرمان كما يلي:

ترتيب اللجنة 1	9	6	10	4	3	7	5	8	1	2	
ترتيب اللجنة 2	2	10	6	8	5	7	3	9	4	1	
ف	7	4ـ	4	4ـ	2ـ	0	2	1ـ	3ـ	1	0 =
ف²	49	16	16	16	4	0	4	1	9	1	116 =

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 116}{10 \times 99} = 1 - 0.7 = 0.3$$

∵ معامل الارتباط ضعيف يدل ذلك على أن التناسق بين ترتيب اللجنتين ضعيف.

4 ـ لحساب معامل ارتباط بيرسون نكون الجدول التالي:

											المجموع
درجة الإحصاء (س)	80	56	36	66	58	75	83	72	40	58	624
درجة المحاسبة (ص)	75	45	52	56	62	68	76	65	35	65	599
س ص	6000	2520	1872	3696	3596	5100	6308	4680	1400	3770	38942
س²	6400	3136	1296	4356	3364	5625	6889	5184	1600	3364	41214
ص²	5625	2025	2704	3136	3844	4624	5776	4225	1225	4225	37409

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{10 \times 38942 - 624 \times 599}{\sqrt{[10 \times 37409 - (599)^2]\,[10 \times 41214 - (624)^2]}} = 0.84$$

ولحساب معامل ارتباط سبيرمان نكون الجدول التالي:

س	80	56	36	66	58	75	83	72	40	58	
ص	75	45	52	56	62	68	76	65	35	65	
رتب س	9	3	1	6	4	8	10	7	2	5	
رتب ص	9	2	3	4	5	8	10	6	1	7	
رتب معدلة س	9	3	1	6	4.5	8	10	7	2	4.5	
رتب معدلة ص	9	2	3	4	5	8	10	6.5	1	6.5	
ف	0	1	2-	2	0.5-	0	0	0.5	1	2-	= 0
$ف^2$	0	1	4	4	0.25	0	0	0.25	1	4	= 14.5

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ}\,\text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 14.5}{10 \times 99} = 0.91$$

نلاحظ أن قيمة معامل الارتباط مختلفة وذلك لأن معدل تغير الظاهرتين غير ثابت. معامل بيرسون أكثر دقة لأن الظاهرتين كميتان.

5 ـ $$\text{ر}_{32.1} = \sqrt{\frac{\text{ر}^2_{21} + \text{ر}^2_{31} - 2\,\text{ر}_{21}\,\text{ر}_{31}\,\text{ر}_{32}}{(1 - \text{ر}^2_{32})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.863)^2 + (0.64)^2 - 2 \times .863 \times .648 \times .709}{[1 - (.709)^2]}}$$

$$= 0.86$$

$$\text{ر}_{3.21} = \frac{\text{ر}_{21} - \text{ر}_{31}\,\text{ر}_{32}}{\sqrt{(1 - \text{ر}^2_{31})(1 - \text{ر}^2_{32})}}$$

$$= \frac{.863 - .648 \times .709}{\sqrt{[1 - (.709)^2]\,[1 - (.648)^2]}} = 0.83$$

من ذلك يتضح أن تأثير 2، 3 على 1 قوي وأن تأثير 3 على 1 و2 ضعيف لأن معامل ارتباط 1، 2 هو 863. ومعامل ارتباط 1 و2 بعزل تأثير 3 هو 0.83 الفرق بينهما بسيط.

6- $$\therefore \text{ر}_{3.21} = \frac{\text{ر}_{21} - \text{ر}_{31}\,\text{ر}_{32}}{(1 - \text{ر}^2_{31})(1 - \text{ر}^2_{32})} \leqslant |1|$$

∴ بالتربيع نجد أن:

$$\frac{(\text{ر}_{21} - \text{ر}_{31}\,\text{ر}_{32})^2}{(1 - \text{ر}^2_{31})(1 - \text{ر}^2_{32})} \leqslant 1$$

$$\therefore \text{ر}^2_{21} - 2\,\text{ر}_{21}\,\text{ر}_{31}\,\text{ر}_{32} + \text{ر}^2_{31}\,\text{ر}^2_{32} \leqslant 1 - \text{ر}^2_{32} - \text{ر}^2_{31} + \text{ر}^2_{31}\,\text{ر}^2_{32}$$

$$\therefore \text{ر}^2_{21} + \text{ر}^2_{31} + \text{ر}^2_{32} - 2\,\text{ر}_{21}\,\text{ر}_{31}\,\text{ر}_{32} \leqslant 1$$

7 ـ معامل الارتباط يبحث في قوة التأثير بين المتغيرات عندما تكون العلاقة بينهما خطية. وحيث أن هذه العلاقة بين س، ص غير خطية عليه سيكون معامل الارتباط مؤشراً غير سليم.

8 ـ لحساب معامل الارتباط الصحيح نحسب القيم الصحيحة للمعلومات المعطاة كما يلي:

مجـ س = 110 − 5 + 6 = 111

مجـ ص = 100 − 8 + 4 = 96

$434 = 24 + 40 - 450 =$ مجـ س ص

$516 = 36 + 25 - 500 =$ مجـ $س^2$

$352 = 16 + 64 - 400 =$ مجـ $ص^2$

∴ معامل الارتباط الصحيح ر =

$$\frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]}}$$

$$= \frac{96 \times 111 - 434 \times 20}{\sqrt{[(96)^2 - 352 \times 20]\,[(111)^2 - 516 \times 20]}}$$

$$= \frac{-1976}{\sqrt{(-2176)(-2001)}}$$

∵ الجذر التربيعي لمقدار سالب (التباين) فيتضح أن المعلومات المعطاة بها خطأ.

9 ـ

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]}}$$

$$= \frac{3 \times 4 - 0 \times 5}{\sqrt{[9 - 25 \times 5]\,[16 - 17 \times 5]}} = \frac{-12}{89.5} = -0.13$$

الارتباط بين الظاهرتين عكسي ضعيف، وحيث أن النتيجة لقيمة معامل الارتباط بين ـ 1، 1 عليه فإن المعلومات صحيحة.

10 ـ حيث أن المعلومات المعطاة تدل على رتب عليه نحسب معاملات ارتباط الرتب لسبيرمان كما يلي:

معامل الارتباط بين الحكم الأول والثاني:

رتب الأول	1	6	3	10	5	2	4	9	7	8	
رتب الثاني	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9	
ف	-2	1	-5	6	-2	-8	2	8	1	-1	= 0
$ف^2$	4	1	25	36	4	64	4	64	1	1	= 204

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 204}{10 \times 99} = -0.24$$

معامل الارتباط بين الحكم الأول والثالث:

رتب الأول	1	6	3	10	5	2	4	9	7	8	
رتب الثالث	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7	
ف	-5	2	-6	2	4	0	1	-1	2	1	= 0
$ف^2$	25	4	36	4	16	0	1	1	4	1	= 92

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 92}{10 \times 99} = 0.44$$

معامل الارتباط بين الحكم الثاني والثالث:

رتب الثاني	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9	
رتب الثالث	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7	
ف	-3	1	-1	-4	6	8	-1	-9	1	2	= 0
$ف^2$	9	1	1	16	36	64	1	81	1	4	= 214

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 214}{10 \times 99} = -0.3$$

لمقارنة معاملات الارتباط الثلاثة نجد أن الحكم الأول والثالث لهما ميول متقاربة نسبياً لأن معامل الارتباط بينهما موجب معتدل.

11 - $\because \text{ر} = \dfrac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$

إذا تم تغيير التصحيح من 50 إلى 100 أي تمّ ضرب كل درجة في 2 فهذا لا يغير معامل الارتباط، وذلك لأن معامل الارتباط بعد التغيير بضرب كل القيم في 2 هو:

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ } 2\text{س} \times 2\text{ص} - \text{مجـ } 2\text{س} \times \text{مجـ } 2\text{ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ }(2\text{س})^2 - (\text{مجـ } 2\text{س})^2\right]\left[\text{ن مجـ }(2\text{ص})^2 - (\text{مجـ } 2\text{ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{4\text{ن مجـ س ص} - 4\,\text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[4\text{ن مجـ س}^2 - 4(\text{مجـ س})^2\right]\left[4\text{ن مجـ ص}^2 - 4(\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{4\left[\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}\right]}{4\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

= معامل الارتباط قبل التغيير

= 0.42

كذلك إذا تم إضافة عدد ثابت لجميع قيم الظاهرتين أو أحدهما فقط فهذا لا يغير معامل الارتباط كما يلي:

معامل الارتباط بعد إضافة 3 لكل طالب في مقرر الإحصاء (س) هو:

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ }(\text{س} + 3)\text{ص} - (\text{مجـ س} + 3)\,\text{مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ }(\text{س} + 3)^2 - \left[\text{مجـ }(\text{س} + 3)\right]^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} + 3\text{ن مجـ ص} - (\text{مجـ س} + 3\text{ن})\,\text{مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ }(\text{س}^2 + 6\text{س} + 9) - \left[(\text{مجـ س} + 3\text{ن})^2\right]\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} + 3\text{ن مجـ ص} - \text{مجـ س مجـ ص} - 3\text{ن مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 + 6\text{ن مجـ س} + 9\text{ن}^2 - (\text{مجـ س})^2 - 6\text{ن مجـ س} - 9\text{ن}^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

= معامل الارتباط قبل التغيير = 0.42

وبذلك فإن معامل الارتباط لا يتغير بأي تغيير شامل لظاهرة واحدة أو للظاهرتين بشرط أن يكون التغيير لكل القيم بنفس الطريقة.

12 ـ لحساب معامل الارتباط بعد دمج المجموعتين معاً في مجموعة واحدة نحسب المجاميع المطلوبة للمتغيرين كما يلي بالنسبة إلى المتغير س.

عدد البيانات هو $\text{ن}_1 + \text{ن}_2 = 25$

$\text{مجـ س}_1 = \text{ن}_1 \overline{\text{س}}_1 = 10 \times 10 = 100$

$\text{مجـ س}_2 = \text{ن}_2 \overline{\text{س}}_2 = 15 \times 7.5 = 112.5$

$\therefore \text{مجـ }(\text{س}_1 + \text{س}_2) = 212.5$

نحسب مجموع مربعات قيم س_1 من العلاقة التالية:

$$\text{ع}^2_{\text{س}_1} = \frac{1}{\text{ن} - 1}\left[\text{مجـ س}_1^2 - \frac{(\text{مجـ س}_1)^2}{\text{ن}_1}\right]$$

$$\therefore \text{مجـ س}_1^2 = (\text{ن}_1 - 1)\,\text{ع}^2_{\text{س}_1} + \frac{(\text{مجـ س}_1)^2}{\text{ن}_1}$$

$$= 9 \times 25 + \frac{(100)^2}{10} = 1134$$

وبالمثل $\text{مجـ س}_2^2 = (\text{ن}_2 - 1)\,\text{ع}^2_{\text{س}_2} + \frac{(\text{مجـ س}_2)^2}{\text{ن}_2}$

$$= 14 \times 16 + \frac{(112.5)^2}{15} = 1067.75$$

$$\therefore \text{مجـ}(\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2) = 2201.75$$

وبالنسبة للمتغير ص نجد أن :

$$\text{مجـ ص}_1 = \text{ن}_1\, \bar{\text{ص}}_1 = 10 \times 15 = 150$$

$$\text{مجـ ص}_2 = \text{ن}_2\, \bar{\text{ص}}_2 = 15 \times 10 = 150$$

$$\therefore \text{مجـ}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2) = 300$$

$$\text{مجـ ص}_1^2 = (\text{ن}_1 - 1)\,\text{ع}^2_{\text{ص}_1} + \frac{(\text{مجـ ص}_1)^2}{\text{ن}_1} =$$

$$= 9 \times 16 + \frac{(150)^2}{10} = 2394$$

$$\text{مجـ ص}_2^2 = (\text{ن}_2 - 1)\,\text{ع}^2_{\text{ص}_2} + \frac{(\text{مجـ ص}_2)^2}{\text{ن}_2}$$

$$= 14 \times 16 + \frac{(150)^2}{15} = 1948$$

ثم نحسب مجموع حاصل ضرب المتغيرين لكل مجموعة من العلاقة التالية :

$$\text{ر}_1 = \frac{\text{ن}_1 \text{مجـ س}_1\text{ص}_1 - \text{مجـ س}_1\, \text{مجـ ص}_1}{\sqrt{\left[\text{ن}_1 \text{مجـ س}_1^2 - (\text{مجـ س}_1)^2\right]\left[\text{ن}_1 \text{مجـ ص}_1^2 - (\text{مجـ ص}_1)^2\right]}}$$

$$\therefore \text{مجـ س}_1\text{ص}_1 = \frac{1}{\text{ن}_1}\left[\text{ر}_1 \sqrt{\left[\text{ن}_1 \text{مجـ س}_1^2 - (\text{مجـ س}_1)^2\right]\left[\text{ن}_1 \text{مجـ ص}_1^2 - (\text{مجـ ص}_1)^2\right]} + \text{مجـ س}_1\,\text{مجـ ص}_1\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[0.5 \sqrt{\left[10 \times 1134 - (100)^2\right]\left[10 \times 2394 - (150)^2\right]} + 100 \times 150\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[0.5 \sqrt{1340 \times 1440} + 15000\right] = 1569.5$$

وبنفس الطريقة نحسب مجـس$_2$ س$_2$ من العلاقة

$$\text{مجـ س}_2\text{ص}_2 = \frac{1}{\text{ن}_2}\left[\text{ر}_2 \sqrt{\left[\text{ن}_2 \text{مجـ س}_2^2 - (\text{مجـ س}_2)^2\right]\left[\text{ن}_2 \text{مجـ ص}_2^2 - (\text{مجـ ص}_2)^2\right]} + \text{مجـ س}_2\,\text{مجـ ص}_2\right]$$

$$= \frac{1}{15}\left[0.6 \sqrt{\left[15 \times 1067.75 - (112.5)^2\right]\left[15 \times 1948 - (150)^2\right]} + 112.5 \times 150\right]$$

$$= \frac{1}{15}\left[.6 \times \sqrt{3360 \times 6720} + 16875\right] = 1315.1$$

وبذلك نحصل على المجاميع المطلوبة لحساب معامل الارتباط بعد دمج المجموعتين وهي :

$$\text{مجـ}(\text{س}_1 + \text{س}_2) = 212.5$$

$$\text{مجـ}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2) = 300$$

$$\text{مجـ}(\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2) = 2201.75$$

$$\text{مجـ}(\text{ص}_1^2 + \text{ص}_2^2) = 4342$$

$$\text{مجـ}(\text{س}_1\text{ص}_1 + \text{س}_2\text{ص}_2) = 2884.6$$

$\therefore$ ر (بعد الدمج) =

$$\frac{(\text{ن}_1 + \text{ن}_2)\,\text{مجـ}(\text{س}_1\text{ص}_1 + \text{س}_2\text{ص}_2) - \text{مجـ}(\text{س}_1 + \text{س}_2)\,\text{مجـ}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)}{\sqrt{\left[(\text{ن}_1 + \text{ن}_2)\,\text{مجـ}(\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2) - \left[\text{مجـ}(\text{س}_1 + \text{س}_2)\right]^2\right]\left[(\text{ن}_1 + \text{ن}_2)\,\text{مجـ}(\text{ص}_1^2 + \text{ص}_2^2) - \left[\text{مجـ}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)\right]^2\right]}}$$

$$= \frac{25 \times 2884.6 - 212.5 \times 300}{\sqrt{\left[25 \times 2201.75 - (212.5)^2\right]\left[25 \times 4342 - (300)^2\right]}}$$

$$= 0.62$$

13 ـ لحساب معامل ارتباط الرتب الصحيح نحسب مجـ ف² الصحيحة

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

$$\therefore 0.8 = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{10 \times 99}$$

$$\therefore \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{990} = 0.2$$

$$\therefore \text{مجـ ف}^2\ (\text{الخاطئة}) = \frac{990 \times .2}{6} = 33$$

$$\therefore \text{مجـ ف}^2\ (\text{الصحيحة}) = 33 - 16 + 9 = 26$$

$$\therefore \text{ر}\ (\text{الصحيحة}) = 1 - \frac{6 \times 26}{990} = 0.84$$

14 ـ 1 ـ لحساب معاملات الارتباط المطلوبة نكون الجدول التالي:

	1	2	3	4	5	6	المجموع
س	1	2	3	4	5	6	21
ص	1	1.2	1.3	1.8	2	2.8	10.1
ع	5	3.5	3	4	1	2	18.5
س ص	1	2.4	3.9	7.2	10	16.8	41.3
س ع	5	7	9	16	5	12	54
ص ع	5	4.2	3.9	7.2	2	5.6	27.9
س²	1	4	9	16	25	36	91
ص²	1	1.44	1.69	3.24	4	7.84	19.21
ع²	25	12.25	9	16	1	4	67.25

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{6 \times 41.3 - 21 \times 10.1}{\sqrt{\left[6 \times 91 - (21)^2\right]\left[6 \times 19.21 - (10.1)^2\right]}} = 0.96$$

$$\text{ر}_{\text{س ع}} = \frac{\text{ن مجـ س ع} - \text{مجـ س مجـ ع}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2\right]\left[\text{ن مجـ ع}^2 - (\text{مجـ ع})^2\right]}}$$

$$= \frac{6 \times 54 - 21 \times 18.5}{\sqrt{\left[6 \times 91 - (21)^2\right]\left[6 \times 67.25 - (18.1)^2\right]}}$$

$$= -0.8$$

$$\text{ر}_{\text{ص ع}} = \frac{\text{ن مجـ ص ع} - \text{مجـ ص مجـ ع}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2\right]\left[\text{ن مجـ ع}^2 - (\text{مجـ ع})^2\right]}}$$

$$= \frac{6 \times 27.9 - 10.1 \times 18.5}{\sqrt{\left[6 \times 19.21 - (10.1)^2\right]\left[6 \times 67.25 - (18.1)^2\right]}}$$

$$= -0.68$$

$$\text{ر}_{\text{س.ص ع}} = \sqrt{\frac{\text{ر}^2_{\text{س ص}} + \text{ر}^2_{\text{س ع}} - 2\,\text{ر}_{\text{س ص}}\,\text{ر}_{\text{س ع}}\,\text{ر}_{\text{ص ع}}}{(1 - \text{ر}^2_{\text{ص ع}})}}$$

$$= \sqrt{\frac{.68- \times .8- \times .96 \times 2 - {}^{2}(.8-) + {}^{2}(.96)}{[{}^{2}(.68-) - 1]}}$$

$$.98 =$$

$$\text{ر}_{\text{ص سع}} = \sqrt{\frac{\text{ر}^{2}_{\text{صس}} + \text{ر}^{2}_{\text{صع}} - 2\,\text{ر}_{\text{صس}}\,\text{ر}_{\text{صع}}\,\text{ر}_{\text{سع}}}{(\text{ر}^{2}_{\text{سع}} - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{.68- \times .8- \times .96 \times 2 - {}^{2}(.68-) + {}^{2}(.96)}{[{}^{2}(.8-) - 1]}}$$

$$.94 =$$

$$\text{ر}_{\text{س صع}} = \sqrt{\frac{\text{ر}^{2}_{\text{سص}} + \text{ر}^{2}_{\text{سع}} - 2\,\text{ر}_{\text{سص}}\,\text{ر}_{\text{سع}}\,\text{ر}_{\text{صع}}}{(\text{ر}^{2}_{\text{صع}} - 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.68-) \times (.8-) \times .96 \times 2 - {}^{2}(.68-) + {}^{2}(.8-)}{[{}^{2}(.96) - 1]}}$$

$$0.86 = \sqrt{\frac{.0579}{.0784}} =$$

$$\text{ر}_{\text{صس.ع}} = \frac{\text{ر}_{\text{صس}} - \text{ر}_{\text{صع}}\,\text{ر}_{\text{سع}}}{\sqrt{(\text{ر}^{2}_{\text{صع}} - 1)(\text{ر}^{2}_{\text{سع}} - 1)}}$$

$$= \frac{(.68-)(.8-) - .96}{\sqrt{[{}^{2}(.68-) - 1]\,[{}^{2}(.8-) - 1]}}$$

$$.94 = \frac{.416}{.44} = \frac{.416}{\sqrt{.54 \times .36}} =$$

$$\text{ر}_{\text{صع.س}} = \frac{\text{ر}_{\text{صع}} - \text{ر}_{\text{صس}}\,\text{ر}_{\text{عس}}}{\sqrt{(\text{ر}^{2}_{\text{عس}} - 1)(\text{ر}^{2}_{\text{صس}} - 1)}}$$

$$.72- = \frac{(.68 - \times .96) - 0.8-}{\sqrt{[{}^{2}(.68-) - 1]\,[{}^{2}(96) - 1]}} =$$

$$\text{ر}_{\text{سع.ص}} = \frac{\text{ر}_{\text{سع}} - \text{ر}_{\text{صس}}\,\text{ر}_{\text{صع}}}{\sqrt{(\text{ر}^{2}_{\text{صع}} - 1)(\text{ر}^{2}_{\text{صس}} - 1)}}$$

$$= \frac{(.8 - \times .96) - .68-}{\sqrt{[{}^{2}(.8-) - 1]\,[{}^{2}(.96) - 1]}}$$

$$0.53 =$$

2 ـ نكون الجدول التالي :

					المجموع
س	7	8	3	6	24
ص	0	5	1	2	8
ع	2	3	1	2	8
س ص	0	40	3	12	55
س ع	14	24	3	12	53
ص ع	0	15	1	4	20
$س^2$	49	64	9	36	158
$ص^2$	0	25	1	4	30
$ع^2$	4	9	1	4	18

$$ر_{س ص} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]}}$$

$$= \frac{8 \times 24 - 55 \times 4}{\sqrt{[^{2}8 - 30 \times 4]\,[^{2}(24) - 158 \times 4]}} = 0.5$$

$$ر_{س ع} = \frac{\text{ن مجـ س ع} - \text{مجـ س مجـ ع}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ع}^2 - (\text{مجـ ع})^2]}}$$

$$= \frac{8 \times 24 - 53 \times 4}{\sqrt{[^{2}8 - 18 \times 4]\,[^{2}24 - 158 \times 4]}} = 0.94$$

$$ر_{ص ع} = \frac{\text{ن مجـ ص ع} - \text{مجـ ص مجـ ع}}{\sqrt{[\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]\,[\text{ن مجـ ع}^2 - (\text{مجـ ع})^2]}}$$

$$= \frac{8 \times 8 - 20 \times 4}{\sqrt{[^{2}8 - 18 \times 4]\,[^{2}8 - 30 \times 4]}} = 0.75$$

$$ر_{س ص.ع} = \sqrt{\frac{ر^2_{س ص} + ر^2_{س ع} - 2\, ر_{س ص}\, ر_{س ع}\, ر_{ص ع}}{(1 - ر^2_{ص ع})}}$$

$$= \sqrt{\frac{.75 \times .94 \times .5 \times 2 - {}^{2}(.94) + {}^{2}(.5)}{[^{2}(.75) - 1]}}$$

$$= 0.99$$

$$ر_{س ع.ص} = \sqrt{\frac{ر^2_{س ص} + ر^2_{س ع} - 2\, ر_{س ص}\, ر_{س ع}\, ر_{ص ع}}{(1 - ر^2_{س ص})}}$$

$$= \sqrt{\frac{.75 \times .94 \times .5 \times 2 - {}^{2}(.75) + {}^{2}(.5)}{[^{2}(.94) - 1]}}$$

$$= 0.92$$

$$ر_{ع.سص} = \sqrt{\frac{ر^2_{سع} + ر^2_{صع} - 2\,ر_{سص}\,ر_{سع}\,ر_{صع}}{(1 - ر^2_{سص})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.94)^2 + (.75)^2 - 2 \times .5 \times .94 \times .75}{[1 - (.5)^2]}}$$

$$= 0.99$$

$$ر_{سص.ع} = \frac{ر_{سص} - ر_{سع}\,ر_{صع}}{\sqrt{(1 - ر^2_{سع})(1 - ر^2_{صع})}}$$

$$= \frac{.5 - .94 \times .75}{\sqrt{[1 - (.94)^2]\,[1 - (.75)^2]}}$$

$$= -0.91$$

$$ر_{سع.ص} = \frac{ر_{سع} - ر_{سص}\,ر_{صع}}{\sqrt{(1 - ر^2_{سص})(1 - ر^2_{صع})}}$$

$$= \frac{.94 - .5 \times .75}{\sqrt{[1 - (.5)^2]\,[1 - (.75)^2]}}$$

$$= 0.99$$

$$ر_{صع.س} = \frac{ر_{صع} - ر_{سص}\,ر_{سع}}{\sqrt{(1 - ر^2_{سص})(1 - ر^2_{سع})}}$$

$$= \frac{.75 - .5 \times .94}{\sqrt{[1 - (.5)^2]\,[1 - (.94)^2]}} = 0.95$$

3 ـ حيث أن معاملات الارتباط لا تتغير إذا تم طرح مقدار ثابت من كل القيم عليه لتبسيط الحسابات نطرح 76 من كل قيم س و41 من كل قيم ص و90 من كل قيم ع ونكون الجدول التالي:

								المجموع
$ح_س$	-2	-17	7	0	-7	12	-5	-12
$ح_ص$	-1	0	4	2	-1	6	-4	6
$ح_ع$	1	-18	5	0	-8	8	-10	-22
$ح_س ح_ص$	2	0	28	0	7	72	20	129
$ح_س ح_ع$	-2	306	35	0	56	96	50	541
$ح_ص ح_ع$	-1	0	20	0	8	48	40	115
$ح_س^2$	4	289	49	0	49	144	25	560
$ح_ص^2$	1	0	16	4	1	36	16	74
$ح_ع^2$	1	324	25	0	64	64	100	578

$$ر_{سص} = \frac{ن\,مجـ\,ح_س ح_ص - مجـ\,ح_س\,مجـ\,ح_ص}{\sqrt{[ن\,مجـ\,ح^2_س - (مجـ\,ح_س)^2]\,[ن\,مجـ\,ح^2_ص - (مجـ\,ح_ص)^2]}}$$

$$\frac{6 \times 12 + 129 \times 7}{\sqrt{\left[^2 6 - 74 \times 7\right]\left[^2(12-) - 560 \times 7\right]}} =$$

$$0.72 =$$

كذلك نجد أن رس ع = 0.96، رص ع = 0.72

وبنفس الطريقة باستخدام القوانين السابقة نجد أن:

رس.ص ع = 0.92، رص.س ع = 0.53، رع.س ص = 0.92

رس ص.ع = 0.15، رس ع.ص = 0.92، رص ع.س = 0.15

15 ـ 1ـ نحسب معامل التوافق كما يلي:

الجنسية / الدقة	1	2	3	المجموع
عالية	10	6	12	28
متوسطة	5	5	2	12
ضعيفة	3	4	1	8
المجموع	18	15	15	

$$\frac{^2 1}{8 \times 15} + \frac{^2 4}{8 \times 15} + \frac{^2 3}{8 \times 18} + \frac{^2 2}{12 \times 15} + \frac{^2 5}{12 \times 15} + \frac{^2 5}{12 \times 18} + \frac{^2 12}{28 \times 15} + \frac{^2 6}{28 \times 15} + \frac{^2 10}{28 \times 18} = \text{ق}$$

$$1.108 =$$

$$0.3 = \sqrt{\frac{0.108}{1.108}} = \sqrt{\frac{\text{ق} - 1}{\text{ق}}} = \therefore \text{معامل التوافق}$$

التوافق بين الجنسية والدقة بسيط.

2 ـ نحسب معامل الاقتران كما يلي:

$$0.98 = \frac{10 \times 10 - 60 \times 140}{10 \times 10 + 60 \times 140} = \frac{\text{أد} - \text{ب حـ}}{\text{أد} + \text{ب جـ}} = \text{معامل الاقتران}$$

الاقتران بين التدخين ووجود المرض قوي.

3 ـ نحسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان كما يلي:

تقديرات المقرر 1	ممتاز	جيد	مقبول	جيد جداً	جيد	ضعيف	مقبول	
تقديرات المقرر 2	جيد جداً	مقبول	ضعيف	جيد	جيد	ضعيف جداً	جيد	
رتب 1	7	4	3	6	5	1	2	
رتب 2	7	3	2	4	5	1	6	
رتب معدلة 1	7	4.5	2.5	6	4.5	1	2.5	
رتب معدلة 2	7	3	2	5	5	1	5	
ف	0	1.5	.5	1	.5 ـ	0	2.5 ـ	0 =
ف²	0	2.25	0.25	1	0.25	0	6.25	10 =

$$\frac{6 \text{ مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} - 1 = \frac{10 \times 6}{48 \times 7} - 1 = 0.82 \quad \therefore \text{ر} = 1 -$$

التأثير بين مستوى المقررين قوي.

4 ـ نحسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان كما يلي:

مستوى الدقة	عالي	متوسط	عالي جداً	متوسط	متوسط	عالي	متوسط	ضعيف	
سنوات الخبرة	10	6	8	5	5	8	7	2	
رتب الدقة	2	4	1	5	6	3	7	8	
رتب الخبرة	1	5	2	6	7	3	4	8	
رتب معدلة للدقة	2.5	5.5	1	5.5	5.5	2.5	5.5	8	
رتب معدلة للخبرة	1	5	2.5	6.5	6.5	2.5	4	8	
ف	1.5	0.5	1.5 ـ	1 ـ	1 ـ	0	1.5	0	0 =
ف²	2.25	0.25	2.25	1	1	0	2.25	0	9 =

$$\therefore \text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{9 \times 6}{63 \times 8} = 0.89$$

التأثير بين مستوى الدقة وسنوات الخبرة قوي.

وبذلك تكون المعادلات الطبيعية هي:

80 = 30 أ + 10 ب + 5 حـ (1)

230 = 100أ + 30 ب + 10 حـ (2)

824 = 354أ + 100 ب + 30 حـ (3)

ويحل هذه المعادلات كما يلي نحصل على قيم أ، ب، حـ بضرب (1) في 2 وطرحها من (2) نجد أن:

160 = 60 أ + 20 ب+ 10 حـ (3)

230 = 100 أ + 30 ب + 10 حـ (4)

بالطرح ـ 70 = − 40 أ ـ 10 ب (5)

كذلك بضرب (2) في 3 وطرحها من (3) نجد أن:

690 = 300 أ + 90 ب + 30 حـ (6)

824 = 354أ + 100 ب + 30 حـ

بالطرح ـ 134 = − 54 أ ـ 10 ب (7)

− 70 = ـ 40 أ ـ 10 ب

بالطرح ـ 64 = ـ 14 أ

∴ أ = 4.6

ب = − 11.4

حـ = 11.2

∴ صْ = 4.6 س^2 ـ 11.4 س + 11.2

عندما س = 10

صْ = 4.6 × 100 − 11.4 × 10 + 11.2 = 357

7 ـ الأرقام القياسية

7 ـ 1 مقدمة:

تعرفنا فيما سبق إلى كيفية الحصول على مقاييس إحصائية تصف لنا البيانات بصورة مطلقة، ولكن نجد في حياتنا اليومية أننا نصف بعض الظواهر التي تختلف وحدات قياسها من خلال التغير الذي يطرأ عليها نسبة إلى الزمان أو المكان أو غيره، فمثلاً نقول إن الأسعار زادت بنسبة 60%، أو إن الإنتاج قد زاد بنسبة 140% عما كان سابقاً أو في مكان ما نسبة إلى مكان آخر. هذه الطريقة في الوصف سميت بالأرقام القياسية.

فالأرقام القياسية هي في الواقع مقاييس إحصائية تستخدم لقياس التغيير الذي يطرأ على العديد من الظواهر التي تقع تحت تأثير عوامل مختلفة فتتغير قيمتها من وقت لآخر أو من مكان لآخر، أي أن الرقم القياسي هو رقم نسبي يستخدم لقياس تغير ظاهر معينة مثل تغير كمية الإنتاج لسلعة ما أو التغير الحاصل في الأسعار أو كميات التصدير أو التوريد أو التغيير في حجم السكان أو دخل الأفراد أو كميات الاستهلاك من سلع مختلفة أو التغير في عدد الخريجين وذلك كله حسب تغير الزمان أو المكان.

والأرقام القياسية في الواقع نجد لها استخدامات عديدة في مجالات مختلفة كالعلوم الاقتصادية والزراعية والاجتماعية وغيرها، ولكن أكثر المجالات استخداماً للأرقام القياسية هي المجالات الاقتصادية خاصة في مجال الأسعار، مع العلم بأن الأسس المستخدمة في هذا المجال تنطبق على أي مجال آخر.

والرقم القياسي كرقم نسبي فهو يصف تغير ظاهرة من وقت لآخر، فقد عرف الزمن الذي تبنى عليه المقارنة بزمن الأساس والزمن الذي تقارنه به بزمن المقارنة، وبذلك يكون الرقم القياسي هو قسمة مقدار الظواهر زمن المقارنة على مقدارها زمن الأساس وضرب الناتج في 100 لكي يكون الرقم القياسي في صورة نسبة مئوية تسهل عملية المقارنة بين الظواهر المختلفة أي:

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\text{مقدار سنة المقارنة}}{\text{مقدار سنة الأساس}} \times 100$$

وسوف نتعرض في دراستنا هذه إلى طرق تركيب الأرقام القياسية بأنواعها المختلفة في مجال الأسعار والتي تنطبق على أرقام قياسية في مجالات أخرى.

وبصورة عامة فالرقم القياسي كمؤشر إحصائي يصف التغيرات التي تحدث على الظواهر من تأثير عدة عوامل بغض النظر عما إذا كانت هذه الظواهر بسيطة أو مركبة.

7 ـ 2 أهمية الأرقام القياسية في مجال الأسعار:

الأرقام القياسية للأسعار لها أهمية كبرى للجهات الرسمية يمكن تلخيصها في النقاط التالية:

أ ـ تحديد سياسة عامة للأسعار وضبطها ومراقبتها.

ب ـ تساهم في تحديد سياسة للاستيراد والتصدير وكميات الاستهلاك للسلع المختلفة.

جـ ـ تساعد في تحديد المعدلات الاقتصادية ومعالجة مشاكل غلاء المعيشة وتنظيم نظام الدخل.

د ـ تستخدم في تقييم القوة الشرائية النقدية وتفيد في التنبؤ بالنشاط المتعلق

بمواطن الشغل.

هـ ـ يمكن استخدامها لقياس فعالية البرامج الاقتصادية وغيرها.

وقبل التعرض إلى طرق تكوين الأرقام القياسية وأنواعها هناك بعض الأسس العامة التي يجب مراعاتها.

7 ـ 3 النقاط الأساسية في تكوين الأرقام القياسية:

يمكن تلخيص الأسس العامة في تكوين الأرقام القياسية في النقاط التالية:

أ ـ تحديد الهدف:

من الأمور الهامة في تكوين الأرقام القياسية هو تحديد الهدف من استخدامها تحديداً تاماً واضحاً حتى نستطيع حساب الرقم المناسب الذي يوضح الهدف ومعرفة العناصر المكوّنة له. فمثلاً إذا أردنا حساب الرقم القياسي الذي يصف التغير في مستوى المعيشة يجب التفكير في أسعار المواد وكذلك الخدمات العامة حتى يوضح هذا الرقم التغيير الحقيقي الذي طرأ على هذه الظاهرة.

ب ـ إختيار بنود الأرقام القياسية:

من أهم وأكبر المشاكل في تكوين الأرقام القياسية هي كيفية اختيار البنود (العناصر) الداخلة في تكوينها المسببة في التغيرات التي طرأت على الظاهرة والتي لها علاقة بتحقيق الهدف من حساب الرقم القياسي. فمثلاً إذا أردنا تكوين رقم قياسي لوصف التغير الذي حصل على سعر أو كمية سلعة معينة خلال فترتين زمنيتين فإنه من السهل حسابه، ولكن إذا كان الرقم القياسي المطلوب حسابه يدخل في تكوينه عدة بنود فهنا يصعب تحديد هذه البنود المؤثرة على الظاهرة وقد يصعب أحياناً حصرها. فمثلاً إذا كان الرقم القياسي

المطلوب حسابه يختص بمستوى المعيشة فيجب اختيار كل العناصر المؤثرة على هذه الظاهرة بمختلف أنواعها بحيث لا يكون عددها كبيراً جداً ولا صغيراً جداً، ولكن الأهم أن يغطي جميع البنود الأساسية التي تؤثر على مستوى المعيشة من مواد أساسية واستهلاكية وخدمات.

جـ ـ إختيار سنة الأساس:

عند اختيار سنة الأساس يجب أن تكون متميزة بالاستقرار، أي خالية من وجود العوامل غير الثابتة التي تؤثر على الظاهرة التي نقوم بدراستها. فإذا كان الرقم القياسي الذي نود حسابه في مجال الأسعار يجب أن تكون سنة الأساس خالية من الظواهر غير العادية مثل الأزمات الإقتصادية أو الحروب أو الآفات الزراعية التي تؤثر كثيراً على الأسعار. كما يجب أن تكون سنة الأساس غير بعيدة عن سنة المقارنة حتى يكون الرقم القياسي ذا فائدة واقعية في المقارنة ويوضح الغرض المطلوب.

د ـ البيانات المجمعة وصلاحيتها للمقارنة:

يجب عند جمع البيانات التأكد من صلاحيتها للمقارنة، فقد يحدث أن البيانات جمعت بطرق مختلفة مثل تغيير في وحدة القياس أو تغيير في المكونات أو غيرها، أو أن هناك اختلافاً وتغييراً قد طرأ على أهمية أو جودة نوع معين أدى إلى التغيير الذي طرأ عليها من سنة الأساس إلى سنة المقارنة. فهذه المشاكل في الواقع تمثل صعوبة كبيرة في تكوين الأرقام القياسية بصورة عامة ويجب مراعاتها قبل تركيب الأرقام القياسية.

هـ ـ تحديد أهمية نسبية لبنود الأرقام القياسية:

مما لا شك فيه أن البنود الداخلة في تكوين الأرقام القياسية غالباً ما يكون لها أهمية نسبية مختلفة عن بعضها البعض، عليه سوف يكون الرقم القياسي معبراً بدقة عن التغير الذي طرأ على هذه البنود عندما نعامل كل بند

حسب أهميته نسبة إلى البنود الأخرى، ولقد سميت هذه الأهمية بالأوزان والتي غالباً ما تكون الكمية المباعة أو المنتجة أو المستهلكة أو المبلغ المنفق على السلعة في سنة الأساس أو سنة المقارنة.

7 ـ 4 انواع الأرقام القياسية وطرق تركيبها:

تنقسم الأرقام القياسية إلى نوعين: الأرقام القياسية البسيطة والأرقام القياسية المرجحة (الموزونة).

أولاً ـ الأرقام القياسية البسيطة:

عن تكوين الرقم القياسي البسيط نعطي لكل البنود الداخلة في حسابه نفس الأهمية، أي نفس الوزن، حتى لو اختلفت وحدات قياسها. ويمكن حساب الرقم القياسي بطريقتين: طريقة التجميع وطريقة المناسيب.

1 ـ طريقة التجميع:

تتلخص طريقة التجميع لحساب الرقم القياسي البسيط في تجميع مقادير البنود الداخلة في تكوينه مثل الأسعار أو الكميات أو مقدار الإنفاق لسنة الأساس، وبنفس الطريقة تجمع مقادير سنة المقارنة ثم نحسب النسبة بينهما مضروبة في 100 فنحصل على الرقم القياسي المطلوب. فإذا رمزنا بالرمز $ع_{مر}$ لسعر السلعة ر سنة الأساس وبالرمز $ع_{نر}$ بسعرها سنة المقارنة فبذلك يكون:

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = \frac{\text{مجـ ع}_{نر}}{\text{مجـ ع}_{مر}}$$

حيث ر = 1، 2، . . . ، ن يرمز للبنود المكونة للرقم القياسي، السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي.

$$\text{وبالمثل يكون الرقم القياسي للكميات} = \frac{\text{مجـ ك}_{نر}}{\text{مجـ ك}_{مر}}$$

حيث $ك_{0ر}$، $ك_{1ر}$ هما كميتا السلعة (ر) من سنة الأساس وسنة المقارنة على التوالي.

$$\text{ويكون الرقم القياسي للإنفاق} = \frac{\text{مجـ ق}_{1}}{\text{مجـ ق}_{0}} = \frac{\text{مجـ ك}_{1ر}\text{ع}_{1ر}}{\text{مجـ ك}_{0ر}\text{ع}_{0ر}}$$

مثال 1: البيانات التالية توضح كميات الإنتاج بالألف طن سنتي 70، 80 لبعض المواد والمطلوب حساب الرقم القياسي بطريقة التجميع لهذه السلع.

السلعة	ألبان	مكرونة	نفط مكرر	إسمنت
كمية الإنتاج سنة 70	6	31.5	300	95
كمية الإنتاج سنة 80	75	67	10000	2800

لحساب الرقم القياسي بطريقة التجميع نحسب مجموع كميات الإنتاج سنة الأساس وسنة المقارنة كما يلي:

$$\text{مجـ ك}_{0ر} = 6 + 31.5 + 300 + 95 = 432.5$$

$$\text{مجـ ك}_{1ر} = 75 + 67 + 10000 + 2800 = 12942$$

وبذلك يكون الرقم القياسي الذي يوضح التغيرات التي طرأت على كميات الإنتاج لهذه السلع من سنة 70 إلى سنة 80 هو:

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\text{مجـ ك}_{1ر}}{\text{مجـ ك}_{0ر}} \times 100 = \frac{12942}{432.5} \times 100 = \%2992.4$$

ومن هذا الرقم يتضح أن كميات الإنتاج لهذه السلع قد زادت بنسبة 2892.4% سنة 80 عما كان عليه سنة 70. ومما لا شك فيه أن هذا الرقم يوضح أن الزيادة كانت بنسبة كبيرة جداً وهذا يرجع بالطبع إلى الاهتمام الكبير الذي أولته الثورة بقطاع الصناعة في المجالات المختلفة.

مثال 2: يبين الجدول التالي أسعار وكميات ثلاث سلع سنة 80، 81 فوضح التغير الذي حدث في الأسعار والكميات ومقدار الإنفاق على هذه السلع من سنة 80 إلى 81.

السلعة	سنة 80		سنة 81	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
1	20	10	26	15
2	50	8	85	10
3	10	20	8	30

لحساب التغير الذي طرأ على أسعار وكميات ومقدار الإنفاق لهذه السلع نحسب الرقم القياسي لكل منهم وذلك كما يلي:

$$\text{مجـ ع}_{0ر} = 20 + 50 + 10 = 80\text{، مجـ ع}_{1ر} = 26 + 85 + 8 = 119$$

$$\text{مجـ ك}_{0ر} = 10 + 8 + 20 = 38\text{، مجـ ك}_{1ر} = 15 + 10 + 30 = 55$$

$$\text{مجـ ك}_{0ر}\text{ع}_{0ر} = \text{مجـ ق}_{0ر} = 10 \times 20 + 50 \times 8 + 20 \times 10 = 800$$

$$\text{مجـ ك}_{1ر}\text{ع}_{1ر} = \text{مجـ ق}_{1ر} = 15 \times 26 + 10 \times 85 + 30 \times 8 = 1480$$

$$\text{وعليه يكون الرقم القياسي للأسعار} = \frac{\text{مجـ ع}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}} \times 100 = \frac{119}{80} \times 100 = \%148.8$$

$$\text{والرقم القياسي للكميات} = \frac{\text{مجـ ك}_{1}}{\text{مجـ ك}_{0}} \times 100 = \frac{55}{38} \times 100 = \%144.7$$

$$\text{والرقم القياسي للإنفاق} = \frac{\text{مجـ ق}_{1}}{\text{مجـ ق}_{0}} \times 100 = \frac{1480}{800} \times 100 = \%185$$

ومن هذه الأرقام يتضح أن الأسعار قد زادت بنسبة 48.8% والكميات قد زادت بنسبة 44.7% وأن الإنفاق على هذه السلع قد زاد بنسبة 85%، وهذا يدل على أن التغير في الأسعار والكميات قد أثر كثيراً على التغير في

الإنفاق. وعلى الرغم من بساطة وسهولة تركيب وحساب الرقم القياسي بطريقة التجميع، ويمكن أن نرمز له بالرمز ر (ت) إلا أنه يختلف باختلاف وحدة القياس مما يعطي لبعض البنود أهمية غير واقعية. من ذلك نجد أن استخدام هذا الرقم القياسي قليل الأهمية خاصة إذا كانت وحدات القياس تتعلق بالأسعار، فمثلاً إذا كانت تكاليف إنتاج سلعة ما كالآتي سنتي 70، 80:

	سنة 70	سنة 80
تكاليف العمالة للشخص في اليوم	2	3
تكاليف المادة الخام للوحدة	.9	1.6

يكون الرقم القياسي ر (ت) $= \frac{\text{مجـ ع}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ع}_{\text{م}}} \times 100 = \frac{3 + 1.6}{2 + .9} \times 100 = 158.6\%$

فإذا تم حساب تكاليف العمالة بالشهر يكون الرقم القياسي هو:

$$\text{ر (ت)} = \frac{90 + 1.6}{60 + .9} \times 100 = 150.4\%$$

وعليه فإن الرقم القياسي قد اختلف لنفس البيانات تبعاً لاختلاف وحدة القياس.

2 ـ طريقة المناسيب:

لقد اتضح لنا أن الرقم القياسي البسيط باستخدام طريقة التجميع لا يعطي الفكرة السليمة على مقدار التغيير خاصة إذا ما اختلفت وحدة قياس البنود، لذلك فقد وجدت طريقة أخرى للحصول على الأرقام القياسية لا تعتمد على وحدة القياس حيث تقيس التغير النسبي لك بند على حدة. هذه الطريقة هي طريقة المناسيب، وتتلخص هذه الطريقة في حساب منسوب كل بند من بنود الرقم القياسي، وهو عبارة عن خارج قسمة مقدار سنة المقارنة على مقدار سنة الأساس ثم يتم حساب متوسط هذه المناسيب مضروباً في 100 فنحصل على

الرقم القياسي بطريقة المناسيب الذي يمكن أن نرمز له بالرمز ر (س).

فإذا رمزنا بالرمز $\text{س}_{\text{ر}}$ لمنسوب البند يكون:

$$\text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{مقدار سنة المقارنة للبند ر}}{\text{مقدار سنة الأساس للبند ر}}$$

وعليه يكون الرقم القياسي ر (س) باستخدام المتوسط الحسابي هو:

$$\text{ر(س)} = \frac{\text{مجـ س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} \times 100$$

أما باستخدام المتوسط الهندسي يكون الرقم القياسي هو:

ر (س) $= \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1\text{، س}_2\text{، . . . . ، س}_{\text{ن}}} \times 100$ حيث ن عدد البنود.

مثال 3: إحسب الرقم القياسي بطريقة المناسيب للمثال 1 الذي يوضح كميات إنتاج بعض السلع سنتي 70، 80

نحسب أولاً منسوب كل سلعة كما يلي:

$$\text{س}_1 = \frac{75}{6} = 12.5$$

$$\text{س}_2 = \frac{67}{31.5} = 2.13$$

$$\text{س}_3 = \frac{10000}{300} = 33.3$$

$$\text{س}_4 = \frac{2800}{95} = 29.5$$

وعليه يكون الرقم القياسي ر (س) باستخدام المتوسط الحسابي هو:

$$\text{ر(س)} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \times 100 = 1936\%$$

وباستخدام المتوسط الهندسي = $\sqrt[4]{12.5 \times 2.13 \times 33.3 \times 29.5} = 1272\%$

نلاحظ: أن الرقم القياسي باستخدام المتوسط الحسابي يختلف عنه باستخدام المتوسط الهندسي. وعموماً فالمتوسط الهندسي يعتبر أكثر دقة وواقعية في وصف الظواهر النسبية إلا أنه أكثر صعوبة في طريقة الحساب مما يقلل من استخداماته.

ثانياً ـ الأرقام القياسية المرجحة (الموزونة):

لقد ذكرنا أن الرقم القياسي البسيط الذي تم حسابه بالطريقتين لا يأخذ في اعتباره أهمية البنود المختلفة حيث يعامل كل البنود بنفس الأهمية، ولكن هذا في الواقع يخالف الحقيقة حيث نجد أن السلع (أو غيرها) لها أهمية أي وزن يختلف من سلعة لأخرى وتتأثر نفس الأهمية بعلاقة السلع ببعضها، ولذلك وجد أن الرقم القياسي البسيط لا يعطي الفكرة السليمة والدقيقة عن مقدار التغيير، عليه فقد دعت الحاجة إلى وجود نوع آخر من الأرقام القياسية يأخذ في اعتباره الأهمية النسبية لكل السلع حيث يتم تحديد أوزانها عن طريق الكميات أو الأسعار أو غيرها لكل بند، هذا النوع سمي بالأرقام القياسية الموزونة.

وحيث أن لدينا سعراً وكمية لسنة الأساس وسعراً وكمية لسنة المقارنة عليه يمكن استخدام أي منها كأوزان أو أي أوزان أخرى مثل:

1 ـ أسعار سنة الأساس × كميات سنة الأساس = $ع_م \, ك_م$ = قيمة سنة الأساس.

2 ـ أسعار سنة المقارنة × كميات سنة المقارنة = $ع_ا \, ك_ا$ = قيمة سنة المقارنة.

3 ـ أسعار سنة الأساس × كميات سنة المقارنة = $ع_م \, ك_ا$.

4 ـ أسعار سنة المقارنة × كميات سنة الأساس = $ع_ا \, ك_م$.

ويتم حساب الرقم القياسي المرجح بالطريقتين السابق شرحهما وذلك كما يلي:

1 ـ طريقة التجميع:

تحسب الأرقام القياسية المرجحة بطريقة التجميع بنفس الطريقة التي تم شرحها للأرقام القياسية البسيطة مع استخدام الأوزان المناسبة للبنود المختلفة، وفي الواقع هناك عدة أوزان نذكر هنا أشهرها:

أ ـ الرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير):

يتم حساب الرقم القياسي للاسبير باعتبار كميات سنة الأساس أوزاناً للأسعار وبذلك يكون:

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\text{مجـ}\, ك_م \, ع_ا}{\text{مجـ}\, ك_م \, ع_م} \times 100$$

ونلاحظ: أن رقم لاسبير يوضح مقدار تغيير الإنفاق لنفس كميات سنة الأساس، أي يوضح التضخم في الأسعار.

ب ـ الرقم القياسي المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باش):

يتم حساب الرقم القياسي لباش باعتبار كميات سنة المقارنة أوزان للأسعار وبذلك يكون:

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\text{مجـ}\, ك_ا \, ع_ا}{\text{مجـ}\, ك_ا \, ع_م} \times 100$$

جـ ـ الرقم القياس لفشر:

يعرف الرقم القياسي لفشر بأنه المتوسط الهندسي للأسبير وباش

وعليه كان الرقم القياسي لفشر = $\sqrt{\frac{\text{مجـ}\, ك_م \, ع_ا}{\text{مجـ}\, ك_م \, ع_م} \times \frac{\text{مجـ}\, ك_ا \, ع_ا}{\text{مجـ}\, ك_ا \, ع_م}} \times 100$.

وقد سمي هذا الرقم بالرقم الأمثل حيث وجد أنه يحقق بعض الخواص الرياضية للأرقام كما سيتضح فيما بعد.

مثال 4: الجدول التالي يوضح أسعار وكميات ثلاث سلع سنتي 86، 87.

والمطلوب: حساب الأرقام القياسية الثلاثة السابق شرحها.

السلعة	سنة 86		سنة 87	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
1	90	2	110	3
2	80	5	65	14
3	45	10	70	8

لحساب الأرقام القياسية للاسبير وباش وفشر يفضل أن نكون الجدول التالي:

السلعة	سنة 86		سنة 87		$\text{ك}_{م}\text{ع}_{م}$	$\text{ك}_{م}\text{ع}_{ر}$	$\text{ك}_{ر}\text{ع}_{م}$	$\text{ك}_{ر}\text{ع}_{ر}$
	السعر	الكمية	السعر	الكمية				
1	90	2	110	3	180	220	270	330
2	80	5	65	14	400	325	1120	910
3	45	10	70	8	450	700	360	560
المجموع					1030	1245	1750	1800

ومن الجدول يتضح أن $\text{مجـ ك}_{م}\text{ع}_{م} = 1030$

$\text{مجـ ك}_{م}\text{ع}_{ر} = 1245$

$\text{مجـ ك}_{ر}\text{ع}_{م} = 1750$،

$\text{مجـ ك}_{ر}\text{ع}_{ر} = 1800$

وعليه يكون الرقم القياسي للاسبير:

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{م}\text{ع}_{ر}}{\text{مجـ ك}_{م}\text{ع}_{م}} \times 100 = \frac{1245}{1030} \times 100 = 120.9\%$$

الرقم القياسي لباش:

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{ر}\text{ع}_{ر}}{\text{مجـ ك}_{ر}\text{ع}_{م}} \times 100 = \frac{1800}{1750} \times 100 = 102.9\%$$

الرقم القياسي لفشر (الرقم الأمثل) $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_{م}\text{ع}_{ر} \times \text{مجـ ك}_{ر}\text{ع}_{ر}}{\text{مجـ ك}_{م}\text{ع}_{م} \times \text{مجـ ك}_{ر}\text{ع}_{م}}} \times 100$

$$= \sqrt{120.9 \times 102.9} = 111.5\%$$

من الواضح أن رقم لاسبير يبين أن الإنفاق للحصول على نفس كميات سنة الأساس قد زاد بنسبة 20.9%.

وبصورة عامة يكون الرقم القياسي المرجح بأوزان ($\text{و}_{ر}$) بطريقة التجميع هو:

الرقم القياسي المرجّح $= \frac{\text{مجـ و}_{ر}\text{ص}_{ار}}{\text{مجـ و}_{ر}\text{ص}_{م}} \times 100$

حيث $\text{و}_{ر}$ هو وزن البند ر، $\text{ص}_{ار}$، $\text{ص}_{م}$ هما مقدارا البند ر سنتي المقارنة والأساس على التوالي.

وفي الواقع فإن الرقم القياسي للاسبير هو أكثر الأرقام استخداماً لسهولة حسابه وتوفر المعلومات اللازمة لأنه يعتمد على كميات سنة الأساس التي دائماً يمكن الحصول عليها بعكس رقم باش الذي يتطلب كميات سنة المقارنة التي يصعب أحياناً الحصول عليها.

2 ـ طريقة المناسيب لحساب الأرقام القياسية المرجحة:

يتم حساب الأرقام القياسية المرجحة بطريقة المناسيب وذلك بحساب منسوب كل بند ثم نحسب المتوسط الموزون لهذه المناسيب باستخدام الأوزان المتناسبة. فإذا كان $\text{س}_{ر}$ هي منسوب البند (ر) وكان الوزن لهذا البند هو $\text{و}_{ر}$

عليه يكون الرقم القياسي المرجح هو:

$$\text{الرقم القياسي المرجح} = \frac{\text{مجـ و}_{\text{ر}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ و}_{\text{ر}}} \times 100$$

وكما ذكرنا سابقاً يمكن اختيار أوزان البنود كميات أو قيمة سنة الأساس أو سنة المقارنة أو أي مقادير أخرى وذلك كما يلي:

أ - الأرقام القياسية المرجحة بكميات سنة الأساس:

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{\text{ء}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ء}}} \times 100$$

ب - الأرقام القياسية المرجحة بكميات سنة المقارنة:

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}} \times 100$$

جـ - الأرقام القياسية المرجحة بقيمة سنة الأساس:

$$= \frac{\text{مجـ ق}_{\text{ء}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ق}_{\text{ء}}} \times 100$$

د - الأرقام القياسية المرجحة بقيمة سنة المقارنة:

$$= \frac{\text{مجـ ق}_{\text{ر}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ق}_{\text{ر}}} \times 100$$

ولتوضيح كيفية حساب هذه الأرقام نأخذ المثال التالي:

مثال 5: البيانات التالية توضح أسعار وكميات أربع سلع سنتي 88، 89 فاحسب الرقم القياسي المرجح للأسعار بالطرق الأربع السابقة.

السلعة	سنة 88		سنة 89	
	الكمية	السعر	الكمية	السعر
أ	40	10	52	15
ب	72	6	70	10
جـ	15	25	20	36
د	30	16	45	14

لحساب الرقم القياسي المرجّح بكميات سنة الأساس وكميات سنة المقارنة يمكن تلخيص المعلومات المطلوبة في الجدول التالي:

السلعة	سنة 88		سنة 89		المنسوب (س_ر)	ك_ء س_ر	ك_ر س_ر
	الكمية	السعر	الكمية	السعر			
أ	40	10	52	15	1.5	60	78
ب	72	6	70	10	1.67	120.24	116.9
جـ	15	25	20	36	1.44	21.6	28.8
د	30	16	45	14	0.88	26.4	39.6
المجموع	157	-	187	-	-	228.24	263.3

ومن هذا الجدول يمكن حساب الرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس وسنة المقارنة وهو:

$$\text{الرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس} = \frac{\text{مجـ ك}_{\text{ء}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ء}}} \times 100$$

$$= \frac{228.24}{157} \times 100 = \%145.45$$

$$\text{الرقم القياسي المرجح بكميات سنة المقارنة} = \frac{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}\ \text{س}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}} \times 100$$

$$= \frac{263.3}{187} \times 100 = \%140.8$$

ولحساب الأرقام القياسية المرجحة بقيمة سنة الأساس وسنة المقارنة نكون الجدول التالي لتسهيل عملية الحساب:

السلعة	سنة 88		سنة 89		المنسوب	القيمة	ق٠ س٠	القيمة	ق١ س١
	الكمية	السعر	الكمية	السعر	سر	ق٠ س٠	سر	ق١ س١	سر
1	40	10	52	15	1.5	400	600	780	1170
2	72	6	70	10	1.67	432	721.44	700	1169
3	15	25	20	36	1.44	375	540	720	1036.8
4	30	16	45	14	.88	480	422.4	630	554.4
المجموع	–	–	–	–	–	1687	2283.84	2830	3930.2

وبذلك يكون الرقم القياسي المرجح بقيمة سنة الأساس $= \frac{\text{مجـ ق٠ س٠ سر}}{\text{مجـ ق٠ س٠}} \times 100$

$$\%135.4 = 100 \times \frac{2283.84}{1687} =$$

الرقم القياسي المرجح بقيمة سنة المقارنة $= \frac{\text{مجـ ق١ س١ سر}}{\text{مجـ ق١ س١}} \times 100$

$$\%138.9 = 100 \times \frac{3930.2}{2830} =$$

ملحوظة: الرقم القياسي المرجح بقيمة سنة الأساس هو في الواقع:

الرقم القياسي للاسبير وذلك لأن: $\frac{\text{مجـ ق٠ س٠ سر}}{\text{مجـ ق٠ س٠}} = \frac{\text{مجـ ك٠ ع٠} \times \frac{\text{ع١}}{\text{ع٠}}}{\text{مجـ ك٠ ع٠}}$

$$= \frac{\text{مجـ ك٠ ع١}}{\text{مجـ ك٠ ع٠}}$$

وبصورة عامة يمكن حساب الرقم القياسي المرجح بأي أوزان بناء على

المعلومات المتوفرة لدينا عن البنود المعطاة.

7 ـ 5 سلسلة الأرقام القياسية:

عند حسابنا للرقم القياسي نسبة لسنة الأساس نوضح بذلك مدى التغيير الذي طرأ بالنسبة لهذه السنة، ولكن في بعض الحالات نود توضيح التغير الطارىء خلال فترة زمنية محددة، فيتم حساب الأرقام القياسية لكل فترة زمنية بالنسبة للفترة السابقة لها، وبذلك نحصل على سلسلة من الأرقام القياسية. وتتميز هذه الطريقة بالقدرة على الأخذ في الاعتبار التغير الذي يحدث بالنسبة لأهمية السلع؛ فقد تستخدم سلع جديدة أو قد تختفي أو تتغير أهمية سلع أخرى داخلة في حساب الرقم القياسي فبذلك يمكننا تغيير الأوزان المختلفة المستخدمة من فترة زمنية لأخرى.

فمثلاً: إذا كانت لدينا أسعار سلعة ما في الفترة الزمنية من سنة 74 إلى 78 كالآتي:

السنة	74	75	76	77	78
السعر	80	120	130	150	180

فيمكننا تكوين سلسلة الأرقام القياسية التي توضح التغيرات التي طرأت على أسعار هذه السلعة لكل سنة نسبة إلى السنة التي قبلها وذلك كما يلي: نرمز بالرمز $ر_{س/74}$ للرقم القياسي على أساس 74 هي سنة الأساس فنجد أن:

$$\%150 = 100 \times \frac{120}{80} = ر_{75/74}$$

$$\%108.3 = 100 \times \frac{130}{120} = ر_{76/75}$$

$$\%115.3 = 100 \times \frac{150}{130} = ر_{77/76}$$

$$ر_{78/77} = \frac{180}{150} \times 100 = 120\%$$

ومن الواضح أنه لو كانت الطريقة المستخدمة في حساب الرقم القياسي واحدة للسلسلة كلها يكون:

$$ر_{78/77} \times ر_{77/76} \times ر_{76/75} \times ر_{75/74} = ر_{78/74}$$

7 ـ 5 ـ 1 تغيير سنة الأساس:

في بعض الحالات تكون لدينا سلسلة من الأرقام القياسية محسوبة لسنة أساس معينة ونود تغيير هذه الأرقام القياسية نسبة إلى سنة أساس أخرى وذلك لحدوث تغيرات على الظاهرة التي ندرسها جعلت سنة الأساس الأولى غير واقعية وغير منطقية للمقارنة، عليه يتم اختيار سنة أساس جديدة ثم نغير الأرقام القياسية المحسوبة لسنة الأساس الأولى إلى سنة الأساس الجديدة وذلك بقسمة كل أرقام السلسلة على الرقم القياسي لسنة الأساس الجديدة فنحصل على الأرقام القياسية نسبة إلى السنة الجديدة.

مثال 6: إذا كانت الأرقام القياسية لسلعة ما محسوبة على أساس سنة 72 ونود تغيير سنة الأساس إلى سنة 74 فنحصل على الأرقام المطلوبة بالقسمة على الرقم القياسي لسنة 74 كما هو موضح أدناه:

السنة	70	71	72	73	74	75	76
الرقم القياسي لأساس 72	95	98	100	110	118	122	130
الرقم القياسي لأساس 74	80.5	83.1	84.7	93.2	100	103.4	110.2

وهذا ناتج من أنّ $ر_{70/72} = \frac{\text{مقدار سنة 70}}{\text{مقدار سنة 72}}$ ، $ر_{74/72} = \frac{\text{مقدار سنة 74}}{\text{مقدار سنة 72}}$

$$\therefore \frac{ر_{70/72}}{ر_{74/72}} = \frac{(\text{مقدار سنة 70})\ (\text{مقدار سنة 72})}{(\text{مقدار سنة 72})\ (\text{مقدار سنة 74})} = \frac{\text{مقدار سنة 70}}{\text{مقدار سنة 74}}$$

$$= ر_{70/74}$$

وبصورة عامة الرقم القياسي ـ بغض النظر عن سنة الأساس التي حسب منها في الوقت الذي يدل ويصف التغيير الذي حدث على الظاهرة مثل ظاهرة الأسعار ـ فهو في الواقع يعطي دلالة على التغيير الذي طرأ على القوة الشرائية للعملة؛ فمثلاً إذا كان الرقم القياسي لسعر سلعة ما هو 125%، نفهم من ذلك أن الأسعار لهذه السلعة قد زادت بنسبة 25% عما كانت عليه سنة الأساس، أي أن القوة الشرائية قد انخفضت عما كانت عليه سنة الأساس فأصبحت:

$$\%80 = 100 \times \frac{100}{125}$$

أي بمعنى الكمية التي كانت تشترى بسعر 0.8 من وحدة العملة سنة الأساس تحتاج إلى وحدة عملة كاملة سنة المقارنة. ومن هذا نرى أن الرقم القياسي في الواقع يوضح التغير الذي يطرأ على الأسعار وفي نفس الوقت يوضح التغير الذي يطرأ على قيمة العملة ـ أي القوة الشرائية من سنة الأساس إلى سنة المقارنة.

7 ـ 6 بعض الخواص الرياضية للأرقام القياسية:

بالإضافة إلى ما ذكرنا سابقاً عن الأرقام القياسية، هناك بعض الخصائص الرياضية التي تتوفر لبعض منها دون غيرها، وعليه تستخدم هذه الخواص في المفاضلة بين الأرقام القياسية المختلفة.

1 ـ الانعكاس في الزمن (المكان):

عند حسابنا للرقم القياسي نسبة إلى سنة الأساس فإذا بدلنا سنة الأساس بسنة المقارنة لهذا الرقم ويكون حاصل ضرب الرقمين يساوي واحداً، نقول أن هذا الرقم يحقق خاصية الانعكاس في الأساس بغض النظر عما إذا كان الأساس زماناً أو مكاناً.

أي أن $ر_{\text{المقارنة/الأساس}} \times ر_{\text{الأساس/المقارنة}} = 1$

من الواضح أن بعض الأرقام القياسية التي تم التعرض لها تحقق هذه الخاصية، مثل الأرقام القياسية البسيطة المحسوبة بطريقة التجميع والأرقام القياسية للمناسيب اعتماداً على المتوسط الهندسي والرقم القياسي لفشر، ولكن الأرقام القياسية المرجحة بكميات سنة الأساس أو كميات سنة المقارنة لا تحقق هذه الخاصية وذلك لأن:

$$\frac{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{م}}{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{م}} \times \frac{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{ر}}{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{ر}} \neq 1$$ الرقم القياسي المرجح بكمية سنة الأساس

ولكن: $\frac{\text{مجـ}\,ع_{ر}}{\text{مجـ}\,ع_{م}} \times \frac{\text{مجـ}\,ع_{م}}{\text{مجـ}\,ع_{ر}} = 1$ الرقم القياسي بطريقة التجميع.

2 ـ الانعكاس في المعامل:

تعتمد هذه الخاصية على أن الرقم القياسي لحاصل ضرب ظاهرتين يساوي حاصل ضرب الرقمين القياسيين لكل منهما. فمثلاً التغير النسبي للأسعار مضروباً في التغير النسبي للكميات مساوٍ للتغير النسبي للقيمة التي هي حاصل ضرب السعر في الكمية.

فإذا كان التغير النسبي للأسعار هو: $\frac{ع_{ر}}{ع_{م}}$ والتغير النسبي للكميات هو: $\frac{ك_{ر}}{ك_{م}}$ والتغير النسبي للقيمة هو: $\frac{ق_{ر}}{ق_{م}}$ عليه:

فإن هذه الخاصية تعني: $\frac{ق_{ر}}{ق_{م}} = \frac{ع_{ر}\,ك_{ر}}{ع_{م}\,ك_{م}}$

وفي الواقع نجد أن الأرقام القياسية التي سبق التعرض لها لا تحقق هذه الخاصية عدا الرقم القياسي لفشر، ولذلك سمي بالرقم القياسي الأمثل.

حيث نجد أن الأسعار مرجحة بالكميات والكميات مرجحة بالأسعار فإن رقم فشر هو:

$$\left[\frac{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{م}}{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{م}} \times \frac{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{ر}}{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{ر}} \times \frac{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{ر}}{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{م}} \times \frac{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{ر}}{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{م}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\text{مجـ}\,ع_{ر}ك_{ر}}{\text{مجـ}\,ع_{م}ك_{م}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(\text{مجـ}\,ق_{ر})^{2}}{(\text{مجـ}\,ق_{م})^{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{مجـ}\,ق_{ر}}{\text{مجـ}\,ق_{م}}$$

وهذا يوضح أن التغير في الأسعار مرجحاً بالكميات والتغير في الكميات مرجحاً بالأسعار مساوٍ التغيير في القيمة.

تمارين

1 - ما المقصود بالرقم القياسي وما هي الاعتبارات التي يجب مراعاتها عند تكوين الأرقام القياسية؟

2 - ما الفرق بين الأرقام القياسية البسيطة والأرقام القياسية الموزونة؟

3 - ما هي خاصية الانعكاس في الزمن وخاصية الانعكاس في المعامل؟ أي الأرقام القياسية تحقق كلاً منهما؟

4 - الجدول التالي يبين أسعار وكميات 6 سلع لفترتين زمنيتين.

فاحسب كلاً من الأرقام القياسية للأسعار:

أ - الرقم القياسي البسيط بطريقة التجميع وطريقة المناسيب.

ب - رقم لاسبير وباش وفشر.

جـ - الرقم القياسي الموزون بطريقة المناسيب مستخدماً المتوسط الحسابي لكميتي سنة الأساس وسنة المقارنة كأوزان.

السلعة	الأسعار		الكميات	
	سنة الأساس	سنة المقارنة	سنة الأساس	سنة المقارنة
1	6	7	100	90
2	24	28	10	8
3	7	4	20	30
4	18	18	30	30
5	8	6	7	10
6	12	18	80	90

5 - إذا كانت أسعار سلعة ما خلال الفترة الزمنية من 74 - 83 كما يلي:

السنة	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
السعر	26	28	25	30	36	40	41	38	44	50

فاحسب مناسيب سعر هذه السلعة مستخدماً:

أ - سنة 74 كأساس.

ب - متوسط السعر للعشر السنوات كأساس.

6 - إذا علمت بأن الأرقام القياسية لكميات استهلاك سلعة ما من سنة 84 - 89 هي كما يلي: 140 ,120 ,135 ,100 ,85، فإذا كانت هذه الأرقام محسوبة لكل سنة نسبة إلى السنة التي قبلها وكانت كمية استهلاك سنة 89 هي 255، فما هي كميات الاستهلاك للسنوات الأخرى؟ حول الأرقام القياسية نسبة إلى سنة 86.

7 - إذا كانت أسعار خمس سلع ونسبة الاستهلاك لسنتي 87، 88 كما يلي:

السلعة	1	2	3	4	5
أسعار سنة 87	6	0.1	8	12	1200
أسعار سنة 88	8.5	0.18	22	12	3400
نسبة الاستهلاك	32	16	18	8	26

فأوجد رقماً قياسياً يوضح التغيرات في أسعار هذه السلع نسبة إلى سنة 87 وإذا علمت بأن أسرة كان دخلها سنة 87 هو 450 د. ل وأصبح سنة 88 هو 530 د. ل، فهل تعتقد أنها تستطيع المحافظة على مستوى معيشتها؟ ولماذا؟

8 - البيانات التالية توضح أسعار وكميات أربع سلع سنتي 70، 85 فاحسب رقماً قياسياً يحقق خاصية الانعكاس في الزمن ورقماً قياسياً آخر يحقق خاصية الانعكاس في المعامل.

السلعة	سنة 80		سنة 85	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	2	10	6	8
ب	4	25	10	30
جـ	10	6	6	20
د	30	16	40	22

9 - إذا علمت بأن الأسعار لخمس سلع قد زادت بنسبة 108% عما كانت عليه الشهر الماضي، فإذا كانت الزيادة كما يلي: السلعة الثانية زادت بنسبة 65% والثالثة بنسبة 210% والرابعة بنسبة 120% والخامسة بنسبة 150% فما هو مقدار الزيادة في السلعة الأولى إذا كانت أوزان هذه السلع كما يلي:

9, 8, 17, 16, 50 على الترتيب.

10 - إذا علمت بأن التغير في الكميات لسلعة ما قد زاد بنسبة 25% والتغير في الإنفاق على هذه السلعة قد زاد بنسبة 50%، فما مقدار التغير في الأسعار لهذه السلعة؟

حل تمارين الباب السابع

1 - أنظر البند مقدمة، 7 - 3 (نظري).

2 - أنظر البند 7 - 4 أولاً وثانياً (نظري).

3 - أنظر البند 7 - 6 (نظري).

4 - أ - لحساب الرقم القياسي البسيط بطريقة التجميع نحسب مجـ $ع_{1ر}$، مجـ $ع_{0ر}$

$$\text{مجـ}\ ع_{0ر} = 6 + 24 + 7 + 18 + 8 + 12 = 75$$

$$\text{مجـ}\ ع_{1ر} = 7 + 28 + 4 + 18 + 6 + 18 = 81$$

∴ الرقم القياسي البسيط للأسعار بطريقة التجميع = $\frac{\text{مجـ}\ ع_{1ر}}{\text{مجـ}\ ع_{0ر}} \times 100$

$$= \frac{81}{75} \times 100 = 108\ \%$$

ثم نحسب الرقم القياسي بطريقة المناسيب كما يلي:

نحسب منسوب كل سلعة $س_ر$

$$س_1 = \frac{7}{6} = 1.17 ،\ س_2 = \frac{28}{24} = 1.17 ،\ س_3 = \frac{4}{7} = 0.57$$

$$س_4 = \frac{18}{18} = 1 ،\ س_5 = \frac{6}{8} = 0.75 ،\ س_6 = \frac{18}{12} = 1.5$$

∴ الرقم القياسي البسيط بطريقة المناسيب باستخدام المتوسط الحسابي هو:

$$\frac{\text{مجـ}\ س_ر}{ن} \times 100 = \frac{1}{6}[1.17 + 1.17 + .57 + 1 + .75 + 1.5] \times 100 = 102.7\%.$$

ب ـ رقم لاسبير = $100 \times \frac{\text{ك}_{م}\,\text{ع}_{ر}}{\text{ك}_{م}\,\text{ع}_{م}}$

نحسب المجاميع المطلوبة كما يلي:

$$2536 = 12 \times 80 + 8 \times 7 + 18 \times 30 + 7 \times 20 + 24 \times 10 + 6 \times 100 = \sum \text{ك}_{م}\,\text{ع}_{م}$$

$$3082 = 18 \times 80 + 6 \times 7 + 18 \times 30 + 4 \times 20 + 28 \times 10 + 7 \times 100 = \sum \text{ك}_{م}\,\text{ع}_{ر}$$

∴ رقم باش = $\%121.5 = 100 \times \frac{3082}{2536} = 100 \times \frac{\sum \text{ك}_{م}\,\text{ع}_{ر}}{\sum \text{ك}_{م}\,\text{ع}_{ر}}$

رقم باش = $100 \times \frac{\sum \text{ك}_{ر}\,\text{ع}_{ر}}{\sum \text{ك}_{ر}\,\text{ع}_{م}}$

$$2642 = 12 \times 90 + 8 \times 10 + 18 \times 30 + 7 \times 30 + 24 \times 8 + 6 \times 90 = \sum \text{ك}_{ر}\,\text{ع}_{م}$$

$$3194 = 18 \times 90 + 6 \times 10 + 18 \times 30 + 4 \times 30 + 28 \times 8 + 7 \times 90 = \sum \text{ك}_{ر}\,\text{ع}_{ر}$$

∴ رقم باش = $\%120.9 = 100 \times \frac{3194}{2642}$

جـ ـ نحسب متوسط كميتي سنة الأساس وسنة المقارنة كأوزان:

$\overline{\text{ك}}_1 = \frac{9 + 100}{2} = 95$ $\overline{\text{ك}}_4 = 30$

$\overline{\text{ك}}_2 = 9$ $\overline{\text{ك}}_5 = 8.5$

$\overline{\text{ك}}_3 = 25$ $\overline{\text{ك}}_6 = 85$

وقد حسبنا مناسيب الأسعار في الفقرة أ عليه يكون الرقم القياسي الموزون

بطريقة المناسيب = $100 \times \frac{\sum \text{و}_{ر}\,\text{س}_{ر}}{\sum \text{و}_{ر}}$

$$100 \times \frac{(1.5 \times 85 + .75 \times 8.5 + 1 \times 30 + .57 \times 25 + 1.17 \times 9 + 1.17 \times 95)}{85 + 8.5 + 30 + 25 + 9 + 95} =$$

$$\%126.2 = 100 \times \frac{299.805}{237.5} =$$

5 ـ أ ـ المناسيب للسعر باستخدام سنة 74 كأساس هو $\frac{\text{ع}_{ر}}{\text{ع}_{74}}$

$\text{س}_1 = \frac{26}{26} = 1$ ، $\text{س}_2 = \frac{28}{26} = 1.08$ ، $\text{س}_3 = \frac{25}{26} = 0.96$ ، $\text{س}_4 = \frac{30}{26} = 1.15$

$\text{س}_5 = \frac{36}{26} = 1.38$ ، $\text{س}_6 = 3.04$ ، $\text{س}_7 = \frac{41}{26} = 1.58$ ، $\text{س}_8 = \frac{38}{26} = 1.46$

$\text{س}_9 = \frac{44}{26} = 1.69$ ، $\text{س}_{10} = \frac{50}{26} = 1.92$

ب ـ نحسب متوسط السعر للعشر سنوات

$$\overline{\text{ع}} = \frac{\sum \text{ع}_{ر}}{\text{ن}} = \frac{50 + 44 + 38 + 41 + 40 + 36 + 30 + 25 + 28 + 26}{10} = 35.8$$

وبذلك تكون المناسيب نسبة إلى متوسط السعر هي:

$\text{س}_1 = \frac{26}{35.8} = 0.73$ ، $\text{س}_2 = \frac{28}{35.8} = 0.78$ ، $\text{س}_3 = \frac{25}{35.8} = 0.7$

$\text{س}_4 = \frac{30}{35.8} = 0.84$ ، $\text{س}_5 = \frac{36}{35.8} = 1.01$ ، $\text{س}_6 = \frac{40}{35.8} = 1.12$

$\text{س}_7 = \frac{41}{35.8} = 1.15$ ، $\text{س}_8 = \frac{38}{35.8} = 1.06$ ، $\text{س}_9 = \frac{44}{35.8} = 1.23$ ، $\text{س}_{10} = \frac{50}{35.8} = 1.4$

6 ـ ∴ الأرقام القياسية محسوبة كل سنة بالنسبة إلى السنة التي قبلها فيكون:

$$\frac{ر_{85}}{ر_{84}} = 140\%\text{، }\frac{ر_{86}}{ر_{85}} = 120\%\text{، }\frac{ر_{87}}{ر_{86}} = 135\%$$

$$\frac{ر_{88}}{ر_{87}} = 100\% \qquad \frac{ر_{89}}{ر_{88}} = 85\%$$

$$\therefore ك_{89} = 255 \text{ وأن } \frac{ر_{89}}{ر_{88}} = \frac{ك_{89}}{ك_{88}}$$

$$\therefore \frac{255}{ك_{88}} = 0.85 \qquad \therefore ك_{88} = 300$$

$$\text{، } \frac{ك_{88}}{ك_{87}} = 1 = \frac{300}{ك_{87}} \quad \therefore ك_{87} = 300$$

$$\text{، } \frac{ك_{87}}{ك_{86}} = 1.35 = \frac{300}{ك_{86}} \quad \therefore ك_{86} = 222.2$$

$$\text{، } \frac{ك_{86}}{ك_{85}} = 1.2 = \frac{222.2}{ك_{85}} \quad \therefore ك_{85} = 185.17$$

$$\text{، } \frac{ك_{85}}{ك_{84}} = 1.4 = \frac{185.17}{ك_{84}} \quad \therefore ك_{84} = 132.26$$

وبذلك تكون الكميات كما يلي:

السنة	84	85	86	87	88	89
الكمية	132.26	185.17	222.22	300	300	255

والأرقام القياسية نسبة إلى سنة 86 هي كما يلي:

60، 83.3، 100، 135، 135، 114.75

7 ـ يمكن حساب الرقم القياسي الموزون بطريقة التجميع باعتبار نسب الاستهلاك أوزاناً يكون:

$$\text{الرقم القياسي الموزون} = \frac{مجـ\ و_{ر}\ ع_{1ر}}{مجـ\ و_{ر}\ ع_{م}} \times 100$$

$$100 \times \frac{(3400 \times 26 + 12 \times 8 + 22 \times 18 + 0.18 \times 16 + 8.5 \times 32)}{1200 \times 26 + 12 \times 8 + 8 \times 18 + 0.1 \times 16 + 6 \times 32}$$

$$= \frac{89166.88}{31633.6} \times 100 = 281.9\%$$

$$\text{نحسب الرقم القياسي لتغير الدخل} = \frac{530}{450} \times 100 = 118\%$$

وبذلك يتضح أن التغير في الأسعار أكبر من التغير في الدخل وعليه فالأسرة لا تستطيع المحافظة على مستوى معيشتها.

كذلك يمكننا حساب الرقم القياسي للأسعار باستخدام طريقة المناسيب موزوناً بنسب الاستهلاك وذلك كما يلي:

$$س_1 = \frac{8.5}{6} = 1.42\text{، } س_2 = \frac{.18}{.1} = 1.8\text{، } س_3 = \frac{22}{8} = 2.75$$

$$س_4 = \frac{12}{12} = 1\text{، } س_5 = \frac{3400}{1200} = 2.83$$

$$\therefore \text{الرقم القياسي الموزون بطريقة المناسيب} = \frac{مجـ\ و_{ر}\ س_{ر}}{مجـ\ و_{ر}} \times 100$$

$$= \frac{2.83 \times 26 + 1 \times 8 + 2.75 \times 18 + 1.8 \times 16 + 1.42 \times 32}{26 + 8 + 18 + 16 + 32} \times 100$$

$$= 205.3\%$$

كذلك باستخدام هذا الرقم القياسي نجد أن التغيرات في الأسعار أكبر من التغير في الدخل وعليه هذه الأسرة لا تستطيع المحافظة على مستوى معيشتها.

8 ـ الرقم القياسي الذي يحقق خاصية الانعكاس في الزمن هو الرقم القياسي البسيط للأسعار بطريقة التجميع = $\frac{\text{مج}\,ع_{ر1}}{\text{مج}\,ع_{ر0}} \times 100$

$$= \frac{40 + 6 + 10 + 6}{30 + 10 + 4 + 2} \times 100 = 134.8\%$$

كذلك يمكن حساب رقماً قياسياً للكميات يحقق خاصية الانعكاس في الزمن وهو الرقم القياسي البسيط للكميات بطريقة التجميع = $\frac{\text{مج}\,ك_{ر1}}{\text{مج}\,ك_{ر0}} \times 100$

$$= \frac{22 + 20 + 30 + 8}{16 + 6 + 25 + 10} \times 100 = 140.4\%$$

أما الرقم القياسي الذي يحقق خاصية الانعكاس في المعامل هو رقم فشر

$$= \sqrt{\frac{\text{مج}\,ك_{ر0}\,ع_{ر1}}{\text{مج}\,ك_{ر0}\,ع_{ر0}} \times \frac{\text{مج}\,ك_{ر1}\,ع_{ر1}}{\text{مج}\,ك_{ر1}\,ع_{ر0}}} \times 100$$

نحسب كلاً من مج $ك_{ر0}\,ع_{ر1}$، مج $ك_{ر0}\,ع_{ر0}$، مج $ك_{ر1}\,ع_{ر0}$، مج $ك_{ر1}\,ع_{ر1}$

مج $ك_{ر0}\,ع_{ر0}$ = $10 \times 2 + 25 \times 4 + 6 \times 10 + 16 \times 30 = 660$

مج $ك_{ر0}\,ع_{ر1}$ = $10 \times 6 + 25 \times 10 + 6 \times 6 + 16 \times 40 = 986$

مج $ك_{ر1}\,ع_{ر0}$ = $8 \times 2 + 30 \times 4 + 20 \times 10 + 22 \times 30 = 996$

مج $ك_{ر1}\,ع_{ر1}$ = $8 \times 6 + 30 \times 10 + 20 \times 6 + 22 \times 40 = 1348$

∴ رقم فشر = $\sqrt{\frac{1348 \times 986}{996 \times 660}} \times 100 = 142.2\%$

9 ـ

السلعة	1	2	3	4	5
مقدار التغير	$س_1$	1.65	3.10	2.20	2.50
الوزن	50	16	17	8	9

الرقم القياسي الموزون لطريقة المناسيب = $\frac{\text{مج}\,و_ر\,س_{ر}}{\text{مج}\,و_ر} \times 100$

$$\therefore 208 = \frac{2.5 \times 9 + 2.2 \times 8 + 3.1 \times 17 + 1.65 \times 16 + 50 \times س_1}{9 + 8 + 17 + 16 + 50} \times 100$$

$$= 50\,س_1 + 119.2$$

$$\therefore س_1 = 1.776$$

∴ مقدار الزيادة في السلعة الأولى هو 77.6%

10 ـ مقدار التغير في الكمية = $\frac{ك_1}{ك_0} = 1.25$

مقدار التغير في الإنفاق = $\frac{ق_1}{ق_0} = 1.5$

$ق_1 = ك_1\,ع_1$ ، $ق_0 = ك_0\,ع_0$

$$\therefore \frac{ق_1}{ق_0} = \frac{ك_1 ع_1}{ك_0 ع_0}$$

$$\therefore 1.5 = \frac{1.25 ع_1}{ع_0}$$

$$\therefore \frac{ع_1}{ع_0} = \frac{1.5}{1.25} = 1.2$$

∴ مقدار التغير في أسعار هذه السلعة هو 120%، أي بزيادة 20% .